MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

50. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. AUGUST 1944)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1944

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107^{IV},
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

---

50. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Strubecker, Prof. Dr. K., Straßburg i. Els., Zornstaden 17: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. IV. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene 1

Wielandt, Dr. H., Aerodyn. Versuchsanstalt e. V., Göttingen, Bunsenstraße 10: Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben 93

Aumann, Prof. Dr. G., Berlin-Friedenau, Rubensstraße 118, und Haupt, Prof. Dr. O., Erlangen, Spardorfer Straße 45: Bemerkung über Abhängigkeit von Funktionen 144

Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Waldhäuser Straße 105: Eine Bemerkung zur C_k- und A-Limitierung von Funktionen 155

Differentialgeometrie des isotropen Raumes. IV.
Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene.

Von

Karl Strubecker in Straßburg

(12 Textbilder.)

Einleitung.

1. Die Theorie der (eigentlich)-flächentreuen Abbildungen der Ebene, von C. F. GAUSS[1]) und A. F. MÖBIUS[2]) begonnen und von D. A. GRAVÉ[3]) vervollständigt, hat zuletzt ihre bisher wohl weitestgehende Förderung durch eine Arbeit von G. SCHEFFERS[4]) erfahren. Wie schon früher E. STUDY[5]) zeigte, sind neben den konformen Abbildungen auch gewisse flächentreue Verwandtschaften für die komplexe Geometrie der analytischen Kurven der Ebene von hervorragender Bedeutung. W. BLASCHKE[6]) hat die flächentreuen Abbildungen der Ebene mit der Differentialgeometrie des (euklidischen) Raumes in Zusammenhang gebracht. In jüngster Zeit hat sich endlich noch H. BECK[7]) mit den flächentreuen Transformationen der Ebene und ihren mehrdimensionalen Verallgemeinerungen befaßt.

---

[1]) C. F. GAUSS, Werke VIII, S. 373. — Die daselbst nach einer kurzen handschriftlichen Notiz von GAUSS abgedruckte Bemerkung stammt nach P. STÄCKEL vermutlich aus den Jahren 1820 bis 1822. Sie besagt, daß die „allgemeinste" flächentreue Abbildung der (x, y)-Ebene auf die (ξ, η)-Ebene durch die Formeln

$$y = \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi}$$

darstellbar sei, unter $u(x, \xi)$ eine willkürliche Funktion von x und ξ verstanden.

[2]) A. F. MÖBIUS, Über eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren. Crelle Journ. 12 (1834), S. 109—133.

[3]) D. A. GRAVÉ, Sur la construction des cartes géographiques. a) Journ. de mathem. (5) 2 (1896), S. 317—361; b) Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 691—693.

[4]) G. SCHEFFERS, Flächentreue Abbildungen in der Ebene. Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 180—186.

[5]) E. STUDY, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie I (Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen). Berlin-Leipzig 1911.

[6]) W. BLASCHKE, Ein Beitrag zur Liniengeometrie. Rend. circ. mat. Palermo 33 (1912), S. 247—253.

[7]) H. BECK, a) Eine Klasse volumtreuer Transformationen. Journ. f. reine u. angew. Math. 184 (1942), S. 1—11; b) Kurvenkongruenzen und volumtreue Transformationen. Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 175—290.

2. Es ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung, der Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene jene Abrundung zu verleihen, welche die entsprechenden Abbildungen der Kugel schon seit langem besitzen. Dabei soll unter einer „*flächentreuen Abbildung*" immer eine *analytische eigentlich-flächentreue Abbildung* verstanden werden[8]).

Es ist wohlbekannt, daß die *flächentreuen Abbildungen der Kugel* ihre erwähnte Abrundung dem engen Zusammenhange verdanken, der sie mit der *Flächentheorie des elliptischen Raumes* verknüpft. Man kann nämlich im elliptischen Raume nach dem von G. Fubini, J. Hjelmslev und E. Study angegebenen Abbildungsprinzip die Flächen Φ dieses Raumes durch parallele Flächennormalen punktweise auf zwei Einheitskugeln Φ_l und Φ_r abbilden. Die Parallelismen dieser Übertragung (eines Gegenstückes von Gaussens sphärischer Abbildung) sind dabei im Cliffordschen Sinne zu verstehen, und es zeigt sich, was zuerst und unabhängig voneinander G. Fubini[9]) und E. Study[10]) entdeckten, daß die so entstehende Beziehung zwischen den beiden Bildkugeln Φ_l und Φ_r eine eigentlich-flächentreue ist, und daß umgekehrt auch jede solche eigentlich-flächentreue Beziehung der Kugeln Φ_l und Φ_r im elliptischen Raume eine Normalenkongruenz, d. h. eine Schar paralleler Flächen Φ bestimmt[11]).

Eine wichtige Ausnahme bilden dabei nur jene Flächen des elliptischen Raumes, deren *Absolutkrümmung* K_a *verschwindet. Ihre auf den Kugeln* Φ_l *und* Φ_r *entworfenen sphärischen Bilder reduzieren sich nämlich auf zwei Kurven.* Man verdankt das genaue Studium dieser interessanten Flächen bekanntlich L. Bianchi[12]).

---

[8]) Über unstetige flächentreue Abbildungen und die Frage der flächentreuen Beziehungen zweier vorgegebener inhalts- und zusammenhangsgleicher ebener Bereiche vgl. F. Schellhammer, Über äquivalente Abbildung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **23** (1878), S. 69—84.

[9]) G. Fubini, Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici. Annali Reale scuola norm. sup. Pisa **9** (1904), S. 1—74; insbes. S. 46.

[10]) E. Study, Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **11** (1902), S. 313—342; insbes. S. 321 und 341.

[11]) Vgl. die Darstellungen bei a) L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale II. Bologna-Pisa 1923, S. 602—603; b) J. L. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry. Oxford 1909, S. 229; c) W. Blaschke, Differentialgeometrie der Flächen im elliptischen Raum. Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 309—320; insbes. § 4; d) W. Blaschke, Nichteuklidische Geometrie und Mechanik III, Leipzig-Berlin 1942, §§ 18 und 25.

[12]) L. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. Annali di mat. (2) **25** (1896), S. 93—129; ferner L. Bianchi[11]) a) §§ 467, 490 bis 492.

Diese bemerkenswerten Beziehungen zur elliptischen Flächentheorie können leicht für ein systematisches Studium der flächentreuen Abbildungen einer Kugel ausgenutzt werden. Dieses Studium wurde von G. FUBINI[9]) angegriffen, wenn auch nicht in allen Einzelheiten erledigt. Wie G. FUBINI zeigte, gilt dabei[13]) z. B. der folgende schöne

Satz I. *Gehört die eigentlich-flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ zweier Einheitskugeln als sphärisches Bild zu einer Fläche Φ des elliptischen Raumes, so entsprechen dabei*

1) *den Paaren isometrischer Kurven von Φ_l und Φ_r die (elliptischen) Krümmungslinien von Φ,*

2) *den Kurven von Φ_l und Φ_r, die durch links- bzw. rechtsparallele Tangenten auf die Fläche Φ bezogen sind, die Asymptotenlinien von Φ.*

3. Es liegt der Wunsch nahe, für die (eigentlich)-flächentreuen Abbildungen der Ebene einen ähnlichen Zusammenhang mit der Differentialgeometrie, vor allem der Flächentheorie eines neuen geeigneten Raumes aufzufinden.

Einen ersten Zusammenhang dieser Art hat schon, wie erwähnt, vor längerer Zeit (und im Anschluß an Gedanken von E. STUDY) W. BLASCHKE[6]) angegeben, indem er zeigte, daß man die Geraden des euklidischen Raumes derart auf die *Punktepaare einer Ebene* abbilden kann, daß (von gewissen Ausnahmen abgesehen) die *Normalenkongruenzen* in *eigentlich-flächentreue Punkttransformationen* übergehen. Zu einem Theorem von der Art des FUBINIschen wird dabei allerdings nicht vorgedrungen.

Die vorliegende Note schlägt einen anderen Weg ein, um zu einem durchsichtigen Zusammenhang zwischen den ebenen flächentreuen Abbildungen und einer räumlichen Differentialgeometrie zu kommen. Sie bedient sich eines natürlichen Grenzfalles des elliptischen Raumes.

Solcher Grenzfälle gibt es zwei: nämlich erstens den sogenannten quasielliptischen Raum, dessen ausführliches Studium man W. BLASCHKE[14]) verdankt, und zweitens den isotropen Raum, dessen Geometrie[15]) und

---

[13]) G. FUBINI[9]) auf S. 52.

[14]) W. BLASCHKE, a) Euklidische Kinematik und Nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1911), S. 61—91 und S. 203—204; b) Ebene Kinematik. Leipzig-Berlin 1938.

[15]) K. STRUBECKER, a) Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine und angew. Math. **178** (1938), S. 135—179; b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **48** (1938), S. 236—257; c) Über die Eulersche Transformation. C. R. Inst. sci. Roumanie **3** (1939), S. 150—155.

Differentialgeometrie[16]) von mir in einer Reihe von Schriften entwickelt worden ist, der als ein weiteres Glied auch diese Note angehört[17]).

4. In der Tat gibt es in diesen beiden Räumen genaue Gegenstücke des FUBINI-STUDYschen Übertragungsprinzips und seiner geometrischen Folgerungen, insbesondere auch des Satzes I.

Für den quasielliptischen Raum hat W. BLASCHKE[18]) dieses Übertragungsprinzip angegeben (ohne auf naheliegende geometrische Folgerungen im Sinne von Satz I ausführlicher einzugehen), und zwar im Zusammenhange mit Fragen der euklidischen Kinematik. Bildet man nämlich im quasielliptischen Raume die Flächenelemente einer Fläche Φ (oder allgemeiner: eines zweidimensionalen LIEschen Elementvereines) und ihrer Parallelflächen „kinematisch", d. h. mittels der CLIFFORDschen Parallelismen dieses Raumes auf die Geraden zweier Ebenen π_l und π_r ab, indem man sie etwa in jedem der beiden möglichen CLIFFORDschen Sinne nach einem festen Punkte O verschiebt und die erhaltene „Parallellage" mit der absoluten Polarebene $\pi_l = \pi_r$ von O bezüglich des quasielliptischen Maßgebildes schneidet, so entsteht — bei richtiger Metrik — eine dichtetreue Beziehung $\Phi_l \to \Phi_r$ zwischen den Geraden dieser beiden Ebenen. Und umgekehrt führt auch jede dichtetreue Beziehung $\Phi_l \to \Phi_r$ zwischen den Geradenfeldern π_l und π_r zu einer Schar von Parallelflächen Φ des quasielliptischen Raumes.

Eine Sonderstellung nehmen wieder ein die von W. BLASCHKE angegebenen quasielliptischen Gegenstücke zu den erwähnten elliptischen Flächen BIANCHIS[12]), mit verschwindender Absolutkrümmung. Deren ∞^2 Flächenelemente führen nämlich nur zu je ∞^1 Bildgeraden, die in π_l und π_r bloß das Tangentensystem zweier Kurven c_l, c_r durchlaufen. Es ist dies der Grenzfall, wo die erwähnten gleichen Dichten identisch verschwinden.

5. Der zweite oben genannte Grenzfall des elliptischen Raumes, nämlich der *isotrope Raum* führt nun mittels der ihm gleichfalls innewohnenden CLIFFORDschen Parallelismen genau auf die gewünschten flächentreuen Verwandtschaften $\Phi_l \to \Phi_r$ zweier Ebenen π_l und π_r als Abbild seiner Flächen Φ (und ihrer isotropen Parallelflächen), wobei unter dem Ausdruck

---

[16]) K. STRUBECKER, Differentialgeometrie des isotropen Raumes. I. Theorie der Raumkurven. Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, **150** (1941), S. 1—53. — II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 743—777. — III. Flächentheorie. Ebenda **48** (1942), S. 369—427.

[17]) Über den Inhalt der vorliegenden Note habe ich am 9. Oktober 1942 in Freiburg (i. Br.) vorgetragen. Vgl. die vorläufige Mitteilung „Über die flächentreuen Abbildungen der Ebene". Bull. Math. de la soc. Roumaine des sciences **44** (1942), S. 59—70.

[18]) W. BLASCHKE[14]), b), Satz 14 auf S. 44; ferner: Riflessioni sulla cinematica classica. Rend. Sem. mat. Univ. Roma (4) **2** (1938), S. 130—135; insbes. § 2.

„Fläche" genauer wieder ein Elementverein im Sinne von S. Lie zu verstehen ist.

Der Herleitung der flächentreuen Abbildungen der Ebene aus dieser geometrisch sehr ergiebigen isotropen Quelle und der theoretischen Auswertung des damit verbundenen einfachen Übertragungsprinzips ist die vorliegende Untersuchung gewidmet. Sie wird neben der einheitlichen Entwicklung einiger Grundeigenschaften der flächentreuen Abbildungen insbesondere auch die genauen Gegenstücke zu den auf den elliptischen Fall bezüglichen Fubinischen Theoremen bringen.

6. Es ist für das Verständnis und die Darstellung dieser bemerkenswerten Zusammenhänge unerläßlich, einige der von mir schon früher entwickelten Grundzüge der Geometrie und insbesondere der Differentialgeometrie des isotropen Raumes zu kennen. Um häufige Verweise zu vermeiden und die vorliegende Note für sich lesbar zu machen, habe ich den einzelnen Kapiteln knappe Darstellungen der benötigten Tatsachen aus der Geometrie des isotropen Raumes vorangestellt. Grundlegend für die Theorie der flächentreuen Verwandtschaften der Ebene sind gewisse *Abbildungen der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punkte E_l, E_r zweier (vereinigter) Ebenen $\pi_l = \pi_r = \pi$.* Sie können in gewissem Sinne als isotrope Gegenstücke von Gaussens *sphärischer Abbildung* der Flächenelemente des euklidischen Raumes aufgefaßt werden.

Diese Abbildungen stützen sich, wie gesagt, auf die Cliffordschen Parallelismen (oder, wie Study im elliptischen Falle sagt, „Parataxien") des isotropen Raumes. Ich habe sie, um Verwechslungen zu vermeiden, als **„parataktische Abbildungen"** bezeichnet und unterscheide sie als *linksparataktisch* ($E \to E_l$) und *rechtsparataktisch* ($E \to E_r$).

Die grundlegenden Eigenschaften dieser Abbildungen, die sich nur durch die isotrope Terminologie einfach und adäquat ausdrücken lassen, insbesondere ihre metrische und gruppentheoretische Natur, wurden in einer früheren Arbeit[19]) eingehender untersucht.

7. Erst nach diesen elementaren Vorbereitungen setzt die eigentliche Untersuchung ein. Dem Studium der parataktischen Bilder eines *Streifens* sind die Grundlagen der isotropen Differentialgeometrie dieser Gebilde vorangestellt. Es sind dabei notwendig verschiedene isotrope Möglichkeiten zu trennen. Erwähnen wir einige der einfacheren Ergebnisse: Der Streifen kann insonderheit ein *isotroper Krümmungsstreifen* oder *ein Schmiegstreifen* sein; für seine beiden *parataktischen Bildkurven* ist dann kennzeichnend,

---

[19]) K. Strubecker, Über die parataktische Abbildung der Flächenelemente des isotropen Raumes auf Punktepaare einer Ebene. Erscheint demnächst in Crelles Journ. f. reine u. angew. Math.

daß sie *isometrisch* oder durch *parallele Tangenten aufeinander bezogen sind.* Der Streifen kann endlich, wie ich es nenne, *äquimetrisch* sein, d. h. der Quotient aus dem Bogenelement ds der Streifenkurve und dem Kontingenzwinkel $d\sigma$ der Torse des Streifens kann den festen Wert eins haben; kennzeichnend dafür ist, daß seine *parataktischen Bildkurven* durch *orthogonale Tangenten aufeinander bezogen* sind.

8. Nach diesen Entwicklungen wende ich mich dem eigentlichen Zusammenhange zwischen den flächentreuen Abbildungen und der Theorie der Flächen des isotropen Raumes zu. Hier findet sich vor allem das isotrope Gegenstück auch des FUBINIschen Theorems. Der räumlich-geometrische Sachverhalt bietet von selbst die genaue Klassifikation der flächentreuen Verwandtschaften dar. Die verschiedensten interessanten Sonderfälle drängen sich auf, und werden mehr oder minder ausführlich behandelt. Ich erwähne hier etwa die flächentreuen Abbildungen, deren Mittenort eine gerade oder krumme Linie ist; ihnen entsprechen im isotropen Raume Kurven, aufgefaßt als Elementvereine im Sinne LIES. Ich erwähne weiter jene interessanten flächentreuen Verwandtschaften, welche im isotropen Raume zu den Minimalflächen oder zu den Flächen der festen Relativkrümmung $K = +1$ führen. Vor allem die letzten hängen mit anderen Gegenständen der Geometrie innig zusammen, nämlich mit der von E. STUDY[5]) so ausführlich studierten Theorie der komplexen analytischen Kurven der Ebene und ihrer v. STAUDTschen Darstellung durch eine (besondere) flächentreue Punktverwandtschaft, ein Zusammenhang, der seinen Ausdruck in einem bemerkenswerten *differentialgeometrischen Übertragungsprinzip* findet.

9. Ein grundlegender Begriff für das feinere Studium der flächentreuen Verwandtschaften $\Phi_l \to \Phi_r$ der Ebene ist jener ihrer *Indikatrizen.* Es sind das unter allen *Ellipsen*, welche in der flächentreuen *berührenden Affinität* einander entsprechen, jene, die *kongruent* sind. Sie hängen aufs engste mit der ersten und dritten Grundform der isotropen Fläche Φ zusammen. Ihre besondere gegenseitige Lage kennzeichnet verschiedene bemerkenswerte Flächentypen und die parataktisch entsprechenden flächentreuen Verwandtschaften. Z. B. sind für die *Flächen der festen Relativkrümmung* $K = +1$ oder für die flächentreuen Verwandtschaften, die nach E. STUDY als STAUDTsche Bilder komplexer analytischer Kurven der Ebene auftreten, diese kongruenten Indikatrizen in beiden Bildfeldern sogar *gleichgestellt.* Im Falle der *isotropen Minimalflächen* aber sind sie gegeneinander *rechtwinklig verschwenkt.*

10. Eine Reihe weiterer interessanter *Anwendungen* der parataktischen Abbildung des isotropen Raumes wird in einer späteren Fortsetzung dieser Reihe dargelegt werden. Sie werden wie wohl schon die bisherigen Teile

zeigen, daß die *Geometrie des isotropen Raumes* nicht nur um ihrer selbst willen das Interesse des Geometers verdient, sondern daß sie für viele geometrische Fragen ein ebenso sicheres wie bequemes und wirksames Hilfsmittel bereitstellt.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Einige Grundeigenschaften der parataktischen Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) einer Ebene 7
II. Die flächentreuen Abbildungen der Ebene als parataktische Bilder der zweidimensionalen Elementvereine des isotropen Raumes 12
III. Die Elementvereine und Streifen von Kurven nichtverschwindender isotroper Krümmung und ihre parataktischen Bilder. Die flächentreuen Abbildungen mit krummlinigem Mittenort 14
IV. Die Geometrie und parataktische Abbildung der geodätischen Streifen des isotropen Raumes. Die flächentreuen Verwandtschaften mit geradlinigem Mittenort 36
V. Überblick über die isotrope Flächentheorie 42
VI. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene mit flächenhaftem Mittenort 47
VII. Die parataktische Abbildung der isotropen Minimalflächen 65
VIII. Die parataktische Abbildung der Flächen Φ der festen Relativkrümmung $K = +1$ 70

I. Einige Grundeigenschaften der parataktischen Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare $(E_l E_r)$ einer Ebene.

11. Definition der parataktischen Abbildung. Als „*parataktisch*" bezeichne ich die Abbildung der Flächenelemente $E\,(x, y, z, p, q)$ eines isotropen Raumes auf die Punktepaare E_l, E_r zweier (vereinigter) Bildebenen $\pi_l = \pi_r = \pi$, welche durch die folgenden Formeln beschrieben ist:

$$(1,1) \qquad E_l \begin{vmatrix} x_l = x + q \\ y_l = y - p \end{vmatrix}, \qquad E_r \begin{vmatrix} x_r = x - q \\ y_r = y + p \end{vmatrix}.$$

Aus ihnen folgt umgekehrt

$$(1,2) \qquad \begin{vmatrix} x = \frac{x_l + x_r}{2}, & y = \frac{y_l + y_r}{2} \\ p = \frac{y_r - y_l}{2}, & q = \frac{x_l - x_r}{2} \end{vmatrix}$$

mit beliebigem z. *Die parataktische Abbildung ist also unempfindlich gegen Schiebungen in vollisotroper, d. h. z-paralleler Richtung.*

Der geometrische Kern dieser schon von G. SCHEFFERS[4]) angegebenen Abbildung wird erst in der Begriffswelt des *isotropen Raumes* offenbar. Sie ist in diesem Raume ein gewisses *Gegenstück zu GAUSSens sphärischer Abbildung.* Diese bildet bekanntlich die Flächenelemente E des Euklidischen Raumes auf die zu ihnen parallelen, d. h. aus ihnen durch Schiebung entstehenden Flächenelemente einer Kugel ab. Allgemeiner als hier gibt es nun auch im isotropen (ähnlich wie im elliptischen) Raume *CLIFFORDsche Schiebungen*, nämlich die sogenannten *Linksschiebungen* der Darstellung

$$(1,3) \qquad S_3^l \left| \begin{array}{l} x' = \alpha + x \\ y' = \beta \quad\quad + y \\ z' = \gamma - \beta x + \alpha y + z \end{array} \right.$$

und die *Rechtsschiebungen*

$$(1,4) \qquad S_3^r \left| \begin{array}{l} x' = \alpha + x \\ y' = \beta \quad\quad + y \\ z' = \gamma + \beta x - \alpha y + z \end{array} \right. .$$

Nennt man Flächenelemente E und E' des isotropen Raumes, welche auseinander durch *Linksschiebung* entstehen, *„rechtsparataktisch"* und solche, die durch *Rechtsschiebung* zusammenhängen, *„linksparataktisch"*, dann kann man nach Auszeichnung der Ebene π der Gleichung

$$(1,5) \qquad z = 0$$

als *Bildebene* die *parataktischen Bilder* E_l und E_r des Flächenelementes E so erklären:

Satz 1. *Das in der Bildebene π liegende Flächenelement des Punktes E_l ist zum Flächenelement E des isotropen Raumes linksparataktisch, das zum Punkte E_r gehörige Flächenelement von π ist zu E rechtsparataktisch. D. h. das Flächenelement E_l in π entsteht aus E durch Rechtsschiebung, das Flächenelement E_r aber aus E durch Linksschiebung.*

Diese Schiebungen sind, ebenso wie die Bilder, durch E *eindeutig* festgelegt. Umgekehrt ist aber, wie erwähnt, E durch seine Bilder E_l und E_r nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmt.

Alle zu einem festen Flächenelement E rechtsparataktischen, d. h. aus ihm durch Linksschiebung entstehenden Flächenelemente E haben *denselben rechten Bildpunkt* E_r. Sie bilden die Elemente eines *Nullsystems*, das zu einem gewissen *Rechtsgewinde* $\mathfrak{G}_r$ der MONGEschen Gleichungsform

$$(1,6) \qquad \mathfrak{G}_r \ldots dz = (x\,dy - y\,dx) + A\,dx + B\,dy$$

gehört. E_r ist der *Nullpunkt* dieses Gewindes auf der Ebene π. Ähnlich bestimmen alle zu E linksparataktischen, d. h. aus ihm durch Rechtsschiebung

entstehenden und zum *gleichen linken Bildpunkt* E_l gehörigen Flächenelemente E im isotropen Raume das *Nullsystem* eines *Linksgewindes* $\mathfrak{G}_l$ der Form

$$\mathfrak{G}_l \ldots dz = -(x\,dy - y\,dx) + A\,dx + B\,dy. \tag{1,7}$$

E_l ist sein Nullpunkt auf der Ebene π.

Wir nennen die *Punkte* E_l und E_r das *links- und rechtsparataktische Bild* des Flächenelementes E und bezeichnen die Ebene der *linken Bilder* E_l gerne mit π_l, jene der *rechten Bilder* mit π_r.

12. Einige wichtige Eigenschaften der parataktischen Abbildung. Den Formeln (1) und (2) entnimmt man eine Reihe einfacher Eigenschaften der parataktischen Abbildung, vor allem den

Satz 2. *Sind* (E_l, E_r) *die beiden parataktischen Bilder eines Flächenelementes* E, *so fällt ihr Mittelpunkt mit dem Grundriß* $\bar{E}$ *des Flächenelementes* E *zusammen. Die Flächenelemente* E *eines Punktes* P *haben also Bildpaare* (E_l, E_r), *die einander in der Spiegelung am Grundriß* $\bar{P}$ *von* P *entsprechen.*

Das letzte ist nur ein Sonderfall eines allgemeineren Theorems, nämlich von

Satz 3. *Liegen die Flächenelemente* E *und* E' *im isotropen Raume symmetrisch bezüglich des Punktes* P, *so erhält man aus den parataktischen Bildern* (E_l, E_r) *von* E *durch Spiegelung am Grundriß* $\bar{P}$ *des Punktes* P *die parataktischen Bilder* (E'_r, E'_l) *von* E', *und zwar ist* E'_r *zu* E_l *spiegelbildlich und* E'_l *zu* E_r.

Wichtig ist das Verhalten der parataktischen Bilder (E_l, E_r) derFlächenelemente E bei einer *Cliffordschen Schiebung* des isotropen Raumes. Es gilt[19])

Satz 4. *Bei einer Linksschiebung* S^l *des isotropen Raumes bleiben die rechten Bilder* E_r *des Flächenelementes* E *in Ruhe, während die linken Bilder* E_l *eine Translation* $2\,T^l$ *erfahren, unter* T^l *die Grundrißwirkung der räumlichen Linksschiebung* S^l *verstanden. Umgekehrt bleiben bei einer Rechtsschiebung* S^r *die linken Bilder* E_l *in Ruhe, während die rechten Bilder* E_r *eine Translation* $2\,T^r$ *erfahren, unter* T^r *die Grundrißwirkung der Rechtsschiebung* S^r *verstanden.*

Wir geben sogleich eine Anwendung. Es kann z. B. jede *nichtisotrope Ebene*

$$z = ux + vy + w \tag{1,8}$$

aus der *Ebene* π $(z = 0)$ durch *Linksschiebung* (längs der Schnittgeraden) erhalten werden. Da die Flächenelemente E von π sich mit ihren parataktischen Bildern decken $E_l = E_r = E$, folgt aus Satz 4 der

Satz 5. *Die parataktischen Bildfelder* $(\varepsilon_l, \varepsilon_r)$ *der Flächenelemente einer nichtisotropen Ebene* ε *sind zueinander schiebungskongruent. Sie hängen nämlich miteinander durch jene Translation* T *längs der Spurgeraden* e *von* ε *auf* π *zusammen, deren Schrittweite* s *gleich ist dem doppelten isotropen Neigungswinkel* 2ϑ *der Ebene* ε *gegen die Bildebene* π.

Das (kommutative) *Produkt* der beiden CLIFFORDschen Schiebungsgruppen S_3^l, S_3^r des isotropen Raumes ist eine nur *fünfgliedrige* Gruppe

$$G_5 = S_3^l \cdot S_3^r = S_3^r \cdot S_3^l.$$

Sie ist eine invariante Untergruppe der Bewegungsgruppe des isotropen Raumes. Ich habe sie als die *Gruppe* G_5 *der isotropen Grenzbewegungen* bezeichnet. Ihre Darstellung lautet:

$$(1,9) \qquad G_5 \left| \begin{array}{l} x' = c_1 + x \\ y' = c_2 \qquad\quad + y \\ z' = c_3 + c_4 x + c_5 y + z \end{array} \right| .$$

Umgekehrt kann jede Grenzbewegung nur bis auf vollisotrope Schiebungen eindeutig in das Produkt einer Links- und Rechtsschiebung zerlegt werden. Es folgt

Satz 6. *Jede Grenzbewegung des isotropen Raumes äußert sich als ein simultanes Paar von Translationen der beiden parataktischen Bildebenen. Umgekehrt legen diese Translationen im isotropen Raume eine Grenzbewegung jedoch nur bis auf eine willkürliche vollisotrope Schiebung fest.*

Die Sätze **4** und **6** enthalten das isotrope Gegenstück des ziemlich gleichzeitig von G. FUBINI, J. HJELMSLEV und E. STUDY entdeckten grundlegenden Theorems der *elliptischen Geometrie*, das gestattet, die Kinematik des elliptischen Raumes auf die simultanen Drehungen zweier Kugeln zu übertragen. Ein ähnliches Übertragungsprinzip hat W. BLASCHKE[14]) durch seine *kinematische Abbildung* für den *quasielliptischen Raum* angegeben. Das obige Theorem beendet diese Kette von Übertragungen.

13. Verhalten der parataktischen Bilder bei Bewegungen des isotropen Raumes. Das Übertragungsprinzip. Die Grenzgruppe ist nur eine invariante Untergruppe der *allgemeinen Bewegungsgruppe* des isotropen Raumes. Diese ist *siebengliedrig*. Sie kann nämlich aufgefaßt werden als das Produkt der Gruppe G_6 der *unimodularen Bewegungen* (oder „*Bewegungen*" schlechthin) des isotropen Raumes der Darstellung

$$(1,10) \qquad G_6 \left\{ \begin{array}{l} x' = a + x \cdot \cos\varphi \;\; - y \cdot \sin\varphi \\ y' = b + x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi \\ z' = c + c_1 x \qquad + c_2 y \qquad + z, \end{array} \right.$$

welche die beiden *absoluten Geraden* des isotropen Raumes der Gleichung

$$t = 0, \quad x^2 + y^2 = 0 \tag{1, 11}$$

festlassen und die Volumina der Raumfiguren nicht ändern, und der folgenden eingliedrigen Gruppe G_1 *modularer Bewegungen*

$$G_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = c_3 z, \end{cases} \tag{1, 12}$$

der gegenüber, ebenso wie der *allgemeinen (modularen) Bewegungsgruppe*

$$G_7 = G_1 \cdot G_6$$

gegenüber, die *Volumina nicht invariant* sind, sondern den *Modul* c_3 aufnehmen.

Man hat folgende parataktische Auswirkungen dieser Gruppen[19]):

Satz 7. *Wird der isotrope Raum einer unimodularen Bewegung* $\mathfrak{B}$ *aus* G_6 *unterworfen, so erfahren die parataktischen Bilder* (E_l, E_r) *seiner Flächenelemente* E *simultane gleichwinklige ebene Bewegungen* $(\mathfrak{B}_l, \mathfrak{B}_r)$, *d. h. solche simultane Bewegungen des linken und rechten Bildfeldes, welche den Parallelismus einer Geraden* g_l *aus* π_l *und* g_r *aus* π_r *erhalten. Im Falle simultaner Drehungen stimmen also Drehsinn und Drehwinkel überein.*

Um ferner aus dem Bildpaare (E_l, E_r) *eines Flächenelementes* E *das parataktische Bildpaar* (E_l', E_r') *des Flächenelementes* E' *zu erhalten, das aus* E *durch eine modulare Bewegung der Gruppe* G_1 (12) *entsteht, hat man das Paar* (E_l, E_r) *aus seinem Mittelpunkte* $\bar{E}$ *zentrisch mit dem Modul*

$$\bar{E}E_l : \bar{E}E_l' = \bar{E}E_r : \bar{E}E_r' = c_3$$

(d. h. mit dem Modul der Bewegung) zu strecken.

Wichtig wird für uns noch die Wirkung des Nullsystems eines Links- oder Rechtsgewindes auf das parataktische Bild sein. Hier gilt[19])

Satz 8. *Das Nullsystem eines Linksgewindes* $\mathfrak{G}_l$ *äußert sich im linken Bilde als Spiegelung am Nullpunkte* N_l *der Bildebene* π, *während die rechten Bilder stehenbleiben. Umgekehrt wirkt sich das Nullsystem eines Rechtsgewindes* $\mathfrak{G}_r$ *bei festen linken Bildern als Spiegelung der rechten Bilder am Nullpunkte* N_r *der Bildebene* π *aus.*

Die *Metrik* des isotropen Raumes ist *in sich dual.* Die isotrope *Bedeutung* dieser Nullsysteme liegt dabei nicht zum mindesten darin, daß durch sie aus jeder metrischen Größe eine wertegleiche *duale* Größe entsteht. Aus dem isotropen *Abstand* zweier Punkte z. B. wird der gleichgroße *Winkel* ihrer Nullebenen.

Aus Satz 7 folgt der für unsere ferneren Anwendungen der parataktischen Abbildung grundlegende[19])

Satz 9. *Die isotropen Bewegungsinvarianten (gegen G_6) einer (aus Flächenelementen aufgebauten) Raumfigur $\mathfrak{F}$ übertragen sich durch parataktische Abbildung auf die elementaren Bewegungsinvarianten ihrer linken und rechten ebenen Bildfiguren $\mathfrak{F}_l$ und $\mathfrak{F}_r$.*

Dies Theorem verbürgt die Möglichkeit, die *Geometrie des isotropen Raumes* an Hand der *euklidischen* Geometrie der parataktischen Bildpaare zu entwickeln. Unter dem Ausdrucke „*Geometrie des isotropen Raumes*" ist dabei stets die *Invariantentheorie seiner sechsgliedrigen Bewegungsgruppe G_6* (10) zu verstehen.

Die Anwendung des *Übertragungsprinzips*, das damit zwischen dem isotropen Raume und dem Paare der parataktischen Bildebenen gewonnen ist, insbesondere auf die *Entwicklung differentialgeometrischer Beziehungen* bilden den eigentlichen Inhalt der vorliegenden Note.

II. Die flächentreuen Abbildungen der Ebene als parataktische Bilder der zweidimensionalen Elementvereine des isotropen Raumes.

14. Der Satz von Scheffers. Es sei durch die Gleichungen

$$(2,1) \qquad E_l \begin{cases} x_l = x_l(u,v) \\ y_l = y_l(u,v) \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x_r(u,v) \\ y_r = y_r(u,v) \end{cases}$$

eine Abbildung $E_l \to E_r$ der Ebene gegeben. Wir fragen nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ihre Punktepaare (E_l, E_r) als parataktische Bilder der Flächenelemente E eines *zweidimensionalen Lieschen Elementvereines* aufgefaßt werden können. Zunächst liefern die Gleichungen

$$(2,2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} & p = -\dfrac{y_l - y_r}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} & q = \dfrac{x_l - x_r}{2} \end{cases}$$

die Koordinaten (x, y, p, q) der Flächenelemente E. Wir setzen voraus, daß die *Funktionalmatrix*

$$(2,3) \qquad \mathfrak{M} = \frac{\partial(x, y, p, q)}{\partial(u, v)}$$

den *Rang* $r = 2$ besitzt. Die Koordinaten (x, y, p, q) bestimmen einen *zweidimensionalen Elementverein* dann und nur dann, wenn sich aus ihnen das *totale Differential*

$$(2,4) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

bilden läßt, das uns durch Integration die noch fehlende Koordinate z der Elemente des Vereines liefert.

Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung (4) ist aber die bekannte *Integrabilitätsbedingung*. Führt man in (4) mittels (2) und (1) die Variablen (u, v) ein, so erhält man als diese Bedingung die Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(u, v)}.} \tag{2, 5}$$

Darin steckt der schon von G. Scheffers[4]) angegebene

Fundamentalsatz der parataktischen Abbildung: *Eine Verwandtschaft $E_l \to E_r$ der Ebene kann dann und nur dann als parataktische Abbildung eines Lieschen Elementvereines im (isotropen) Raume aufgefaßt werden, wenn sie eigentlich flächentreu ist.*

Nach (1) fällt der *Mittenort der Verwandtschaft $E_l \to E_r$*, d. h. der Ort der Punkte

$$\bar{\mathfrak{x}} \begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} \end{cases} \tag{2, 6}$$

mit dem *Grundriß* des Ortes der Punkte $\mathfrak{x}(x, y, z)$ des zweidimensionalen Elementvereines zusammen. Man hat danach *drei Möglichkeiten* zu unterscheiden, je nach dem *Range r der Funktionalmatrix*

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \tag{2, 7}$$

(I) Rang $r = 2$. Der *Mittenort* $\bar{\mathfrak{x}}$ der flächentreuen Verwandtschaft ist ein *ebener Bereich*; der Liesche Elementverein besteht aus den Flächenelementen einer *Fläche* der Gestalt

$$z = z(x, y). \tag{2, 8}$$

Man kann in diesem Falle die Koordinaten (x, y) als Parameter (u, v) wählen und erhält als gemeinsamen Wert der Funktionaldeterminanten nach (2)

$$\boxed{\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)} = 1 + rt - s^2.} \tag{2, 9}$$

(II) Rang $r = 1$. Der Mittenort $\bar{\mathfrak{x}}$ der Verwandtschaft ist eine *Kurve*. Der *Elementverein* im Raume besteht aus den *Flächenelementen, welche eine gewisse Kurve $\mathfrak{x}$ berühren, die sich über der Grundrißkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ erhebt.*

Wir werden dabei notwendig *zwei Fälle* zu unterscheiden haben, je nachdem

(α) $\bar{\mathfrak{x}}$ *krummlinig*,

(β) $\bar{\mathfrak{x}}$ *geradlinig*

ist.

(III) Rang $r = 0$. Der Mittenort ist ein *fester Punkt* $\bar{\mathfrak{x}}$. Der Elementverein besteht aus den *Flächenelementen* eines *festen Punktes* $\mathfrak{x}$, dessen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ ist. Die *flächentreue Verwandtschaft* $E_l \to E_r$ fällt mit der *Spiegelung am Punkt* $\bar{\mathfrak{x}}$ zusammen.

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen die *Funktionaldeterminanten* (5) *identisch verschwinden. Die parataktischen Bilder* E_l, E_r *der Flächenelemente* E *des* Lieschen *Vereines beschreiben dann in unabhängiger Weise lediglich zwei Kurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$.

Ist dabei **(I)** der *Mittenort* $\bar{\mathfrak{x}}$ *flächenhaft*, so liegt im Raume eine *Fläche* $z = z(x, y)$ vor, welche nach (9) der *Monge-Ampèreschen Gleichung*

$$rt - s^2 = -1 \tag{2, 10}$$

genügt, welche besagt, daß die Fläche die feste *isotrope Relativkrümmung*

$$K = rt - s^2 = -1 \tag{2, 11}$$

besitzt. Wir werden die Theorie dieser für die isotrope Differentialgeometrie wichtigen Flächen aus diesem neuen Gesichtspunkt sehr leicht entwickeln können. Ist jedoch **(II)** der *Mittenort* der Kurven $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ selber nur *kurvenhaft*, so liegen notwendig *zwei parallele Geraden* $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ und ihre *Mittengerade* $\bar{\mathfrak{x}}$ vor, und der Elementverein im Raume besteht aus allen *Flächenelementen einer (nicht vollisotropen) Geraden.*

Wir entwickeln im folgenden ausführlicher einige *Zusammenhänge zwischen den flächentreuen Abbildungen und der isotropen Differentialgeometrie der* Lieschen *Elementvereine* und erhalten auch eine *Klassifikation der analytischen (eigentlich) flächentreuen Abbildungen der Ebene.*

III. Die Elementvereine und Streifen von Kurven nicht verschwindender isotroper Krümmung ($\varkappa \neq 0$) und ihre parataktischen Bilder. Die flächentreuen Abbildungen mit krummlinigem Mittenort.

15. Die natürlichen Gleichungen einer Kurve des isotropen Raumes. Frenetsche Formeln.

Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s) \tag{3, 1}$$

die Darstellung einer *Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ des isotropen Raumes, und $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ ihr Grundriß auf die Ebene π (1, 5), wobei s den *isotropen Bogen* der Kurve bezeichnet, der durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3, 2}$$

definiert ist und der im Grundriß in elementarer Weise abgelesen werden kann. Ihre beiden *isotropen Grundinvarianten* sind: Die isotrope *Krümmung*

$$\varkappa = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = [\bar{\mathfrak{x}}', \bar{\mathfrak{x}}''], \tag{3, 3}$$

die mit der Krümmung des Grundrisses $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ zusammenfällt, und ihre isotrope *Torsion*[20])

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} = \frac{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}'']^2}. \tag{3, 4}$$

Durch die *natürlichen Gleichungen*

$$\varkappa = \varkappa(s) \neq 0, \quad \tau = \tau(s) \tag{3, 5}$$

ist die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ eindeutig bis auf isotrope Bewegungen festgelegt.

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{3, 6}$$

kennzeichnet dabei die *Kurven in nichtisotropen Ebenen*.

Eine *Ausnahme* tritt nur ein, wenn

$$\varkappa(s) \equiv 0 \tag{3, 7}$$

ist, der *Grundriß* $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Kurve also *geradlinig* ist, und diese selbst in einer *isotropen*, d. h. z-parallelen *Ebene* liegt. Dann ist $[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] = [\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}''] \equiv 0$, die Torsion τ also nicht definiert, und an die Stelle der versagenden Krümmung $\varkappa$ tritt als Ersatz die *Normalkrümmung*

$$\varkappa^* = z''(s) \tag{3, 8}$$

der Kurve. Sie verschwindet für *gerade Linien* und ist konstant für *parabolische Kreise*.

Umgekehrt ist eine Kurve in isotroper Ebene durch ihre *natürlichen Gleichungen*

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = \varkappa^*(s) \tag{3, 9}$$

bis auf isotrope Bewegungen eindeutig festgelegt.

---

[20]) Die Größe τ ist eine *relative Invariante* der *vollen Gruppe* G_{10} *der Affinitäten*, welche den Fernpunkt der z-Achse stehen lassen:

$$X = n_1 + p_1 x + q_1 y, \qquad Y = n_2 + p_2 x + q_2 y, \qquad Z = n_3 + p_3 x + q_3 y + r_3 z,$$

und eine *absolute Invariante* der *Untergruppe* G_9, die sich daraus für $r_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1$ ergibt. — Vgl. G. Tzitzéica, Sur certaines courbes gauches. Annales de l'Ecole Norm. Sup. 42 (1925), S. 379–390 (= Oeuvres I, Bukarest 1941, Nr. 69). — Dort findet sich auch bereits die Bemerkung, daß die Kurven $\tau = \tau_0 = \text{const.}$ identisch sind mit den *Komplexkurven* der *linearen Komplexe*

$$dz = A\,dx + B\,dy + \tau_0(x\,dy - y\,dx).$$

Für Kurven in *vollisotropen Ebenen*, das sind Ebenen durch eine der beiden *absoluten Geraden* (1, 11), ist nach (2) $s \equiv 0$. Sie sollen hier ausgeschlossen werden. Ihre Geometrie wird uns bei späterer Gelegenheit beschäftigen.

Die Theorie der Kurven und Streifen des isotropen Raumes gestaltet sich verschieden, je nachdem ihre Krümmung $\varkappa \neq 0$ oder $= 0$ ist.

Wir setzen zunächst

(3, 10) $$\boxed{\varkappa \neq 0}$$

voraus.

Dann ist es möglich, mit der Kurve ein *begleitendes Dreibein* zu verbinden, bestehend aus

1) *dem Tangentenvektor*

(3, 11) $$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s),$$

der ein Einheitsvektor ist, d. h. für den (an regulären Stellen)

(3, 12) $$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = x'^2 + y'^2 = 1$$

ist,

2) dem dazu (im isotropen Sinne) normalen, in der Schmiegebene enthaltenen *Hauptnormalenvektor*

(3, 13) $$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}''(s),$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen (konstanten) *Binormalenvektor*

(3, 14) $$\mathfrak{b} = (0, 0, 1),$$

der *vollisotrop* und von der Spanne eins ist. Dabei ist $\mathfrak{h}$ so orientiert, daß

(3, 15) $$[\mathfrak{t}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}] = +1$$

ist. Für dies Dreibein gilt als Gegenstück der Frenetschen *Formeln* das folgende System von *Ableitungsgleichungen*

(3, 16) $$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathfrak{t}' = & . & \varkappa\mathfrak{h} \quad . \\ \mathfrak{h}' = & -\varkappa\mathfrak{t} & +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & . \quad 0 & . \end{array}}$$

Seine Herleitung stützt sich auf die zwischen $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$ und $\mathfrak{b}$ bestehende *Vektoridentität*:

(3, 17) $$\varkappa^3\,\mathfrak{x}' - \varkappa'\,\mathfrak{x}'' + \varkappa\,\mathfrak{x}''' = \varkappa^2\,\tau\,\mathfrak{b}.$$

16. Die Invarianten der nichtgeodätischen Streifen des isotropen Raumes. Die *Schmiegebene* σ der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ sei *nicht isotrop*, d. h. es sei wie vorhin

$$\varkappa \neq 0. \tag{3, 18}$$

Dann kann man die *berührenden Flächenelemente* E des Punktes $\mathfrak{x}$ durch den *Neigungswinkel* ϑ festlegen, den sie gegen das *Schmiegelement* σ bilden. Bezeichnet $\mathfrak{y}$ jenen auf $\mathfrak{t}$ normalen Einheitsvektor von E, für den

$$[\mathfrak{t}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}] = +1 \tag{3, 19}$$

ist, so gilt für diesen „*Normalvektor*“ $\mathfrak{y}$ des Flächenelementes E

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta\,\mathfrak{b}. \tag{3, 20}$$

Variieren hier s und ϑ in unabhängiger Weise, so erhält man alle ∞^2 berührenden Flächenelemente $E(s, \vartheta)$ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$. Wählt man ϑ aber als Funktion von s

$$\vartheta = \vartheta(s), \tag{3, 21}$$

so erhält man die ∞^1 Flächenelemente $E(s)$ eines *Streifens* durch die „*Leitkurve*“ $\mathfrak{x}(s)$, der auch umgekehrt durch seine *drei Invarianten*

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 22}$$

in natürlicher Weise, d. h. bis auf isotrope Bewegungen eindeutig, festgelegt ist. Es ist jedoch günstiger, dieses Tripel von Invarianten durch ein anderes zu ersetzen, das man aus den *Ableitungsgleichungen* für das begleitende Dreibein $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{b}$ des Streifens entnimmt. Man hat nämlich

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \quad . \quad \varkappa\mathfrak{y} + \quad \varkappa\,\vartheta\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \quad . \quad + (\tau - \vartheta')\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \quad . \quad 0 \quad\quad . \end{aligned}} \tag{3, 23}$$

und gewinnt daraus die drei *Streifeninvarianten*

$$\begin{aligned} a &= \tau - \vartheta', && \text{die „}\textit{geodätische Windung}\text{“}, \\ b &= \varkappa\,\vartheta, && \text{die „}\textit{Normalkrümmung}\text{“}, \\ c &= \varkappa, && \text{die „}\textit{geodätische Krümmung}\text{“}. \end{aligned} \tag{3, 24}$$

Die zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ *konjugierte Tangente*, d. h. die *Erzeugende* der *Torse* des Streifens ist durch den Vektor

$$\mathfrak{e} = a\,\mathfrak{t} - b\,\mathfrak{y} \tag{3, 25}$$

gegeben. Daraus schließt man, daß $a = 0$ für *isotrope Krümmungsstreifen* kennzeichnend ist, d. h. solche, deren Kurventangente $\mathfrak{t}$ und Erzeugende $\mathfrak{e}$ (im isotropen Sinne) *normal* sind. $b = 0$ jedoch kennzeichnet *Schmiegstreifen*. $c = 0$ endlich charakterisiert die *geodätischen Streifen* des isotropen Raumes.

Es sind das jene, deren Leitkurven $\mathfrak{x}(s)$ in isotropen Ebenen liegen. Da in diesem Abschnitte $c = \varkappa \neq 0$ sein sollte, handelt es sich hier zunächst um *nichtgeodätische Streifen.*

Aus (24) folgt der

Satz 10. *(Isotropes Gegenstück zum Satze von* Meusnier.*) Alle durch die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ gelegten Streifen, welche im Punkte s dasselbe Flächenelement E enthalten, haben daselbst dieselbe isotrope Normalkrümmung.*

Eine *geometrische Deutung der isotropen Normalkrümmung* $b = \varkappa \vartheta$ liegt z. B. in folgendem

Satz 11. *Unter den isotropen Kugeln, welche den Streifen an der Stelle s berühren, gibt es eine, welche die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ oskuliert. Der Parameter p dieser „*Meusnierschen *Kugel" ist gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens.*

$$R = \frac{1}{\varkappa \vartheta} = p. \tag{3, 26}$$

Unter einer *isotropen Kugel* ist dabei eine Fläche zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (1, 11) zu verstehen, also ein *Paraboloid* der Form

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) + Ax + By + C. \tag{3, 27}$$

17. Die parataktischen Bilder des Elementvereines einer Kurve nichtverschwindender isotroper Krümmung. Das unter dem isotropen Winkel ϑ gegen das Schmiegelement geneigte *Berührungselement* $E(x, y, z, p, q)$ der *Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *nichtverschwindender Krümmung* $(\varkappa \neq 0)$ hat die Stellungskoordinaten

$$p = \vartheta y' + \frac{z'y'' - z''y'}{\varkappa}, \quad q = -\vartheta x' + \frac{x'z'' - x''z'}{\varkappa}. \tag{3, 28}$$

Seine beiden *parataktischen Bildpunkte* E_l, E_r *sind daher nach* (1, 1) die folgenden:

$$E_l \begin{cases} x_l = x - \vartheta x' + \dfrac{x'z'' - x''z'}{\varkappa}, \\ y_l = y - \vartheta y' + \dfrac{y'z'' - y''z'}{\varkappa}; \end{cases}$$

$$E_r \begin{cases} x_r = x + \vartheta x' - \dfrac{x'y'' - x''z'}{\varkappa}, \\ y_r = y + \vartheta y' - \dfrac{y'z'' - y''z'}{\varkappa}, \end{cases} \tag{3, 29}$$

Formeln, die wir bequemer *vektoriell* schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l &= \bar{\mathfrak{x}} - \left(\vartheta - \frac{z''}{\varkappa}\right)\bar{\mathfrak{x}}' - \frac{z'}{\varkappa}\bar{\mathfrak{x}}'', \\ \bar{\mathfrak{x}}_r &= \bar{\mathfrak{x}} + \left(\vartheta - \frac{z''}{\varkappa}\right)\bar{\mathfrak{x}}' + \frac{z'}{\varkappa}\bar{\mathfrak{x}}''. \end{aligned}} \tag{3, 30}$$

Der *Verein* der ∞^2 Berührungselemente $E(s, \vartheta)$ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ vermittelt eine *Verwandtschaft* $\bar{\mathfrak{x}}_l(s, \vartheta) \to \bar{\mathfrak{x}}_r(s, \vartheta)$ zwischen seinen parataktischen Bildfeldern. Für deren Funktionaldeterminanten findet man den gemeinsamen Wert

(3, 31) $$\boxed{\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(\vartheta, s)} = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(\vartheta, s)} = \varkappa\vartheta.}$$

Dieser Wert ist nach (23) einfach die gemeinsame *Normalkrümmung* b der Streifen von $\mathfrak{x}(s)$, welche das Flächenelement E enthalten. Er verschwindet wegen (18) nur für die *Schmiegelemente* ($\vartheta = 0$) der Kurve $\mathfrak{x}(s)$.

Aus den Formeln (31), die auch eine *neue geometrische Deutung der Normalkrümmung eines Streifens* und eine *neue Form des* MEUSNIERschen *Theorems* enthalten, folgt

Satz 12. *Die parataktischen Bildpunkte $E_l(\bar{\mathfrak{x}}_l)$ und $E_r(\bar{\mathfrak{x}}_r)$ der berührenden Flächenelemente E einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ nichtverschwindender isotroper Krümmung ($\varkappa \neq 0$) vermitteln eine eigentlich-flächentreue Verwandtschaft zwischen den beiden Bildfeldern π_l und π_r. Der Ort der Mitten $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathfrak{x}}_l + \bar{\mathfrak{x}}_r)$ entsprechender Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ der Verwandtschaft ist dabei eine krumme Linie, nämlich der Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$.*

Die flächentreue Verwandtschaft ist wegen $\varkappa \neq 0$ singulär nur in den Bildpaaren der Schmiegelemente ($\vartheta = 0$), welche das parataktische Bildpaar des Schmiegstreifens der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ beschreiben.

Die Ergebnisse des Abschnittes **II** verbürgen zusammen mit Satz **12**, daß auch umgekehrt *jede flächentreue Verwandtschaft mit kurvenhaftem (krummlinigen) Mittenort durch parataktische Abbildung des Elementvereines einer Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des isotropen Raumes von nichtverschwindender Krümmung $\varkappa \neq 0$ gewonnen werden kann.*

Um eine *allgemeine Konstruktion* dieser Klasse flächentreuer Abbildungen zu gewinnen und einige ihrer Eigenschaften zu übersehen, bedarf es eines eindringlicheren Studiums der parataktischen Bilder der Streifen, welche durch die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ gehen.

18. Die parataktischen Bilder der (nichtgeodätischen) Streifen durch die Kurve $\mathfrak{x}(s)$. Das Verzerrungsparallelogramm. Ist die Neigung ϑ als Funktion des Bogens s gegeben

(3, 32) $$\vartheta = \vartheta(s),$$

so erhält man im isotropen Raume einen bestimmten Streifen durch die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ und in den Ebenen π_l, π_r seine *parataktischen Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l(s)$, $\bar{\mathfrak{x}}_r(s)$ der Darstellung (30), die durch gleiche Werte des Parameters s aufeinander bezogen sind. *Die isotropen Eigenschaften des Streifens spiegeln sich dabei*

vollkommen in den simultanen Eigenschaften seiner parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$. Insbesondere äußern sich die isotropen *Streifeninvarianten* in einfachen *Simultaninvarianten dieser beiden Bildkurven.*

Zunächst liefert die *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ der Bildpaare $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l(s) + \bar{\mathfrak{x}}_r(s)}{2} \tag{3, 33}$$

den *Grundriß der Streifenkurve* $\mathfrak{x}(s)$ und damit ihren Bogen s und die Krümmung $\varkappa$, welche mit der *geodätischen Krümmung* c des Streifens übereinstimmt. Sie sind an $\bar{\mathfrak{x}}$ in elementarer Weise ablesbar. Ferner erhalten wir durch Differentiation von (30) unter Beachtung der Identität (17) *die Grundformeln*

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l' &= (1 + \tau - \vartheta')\,\bar{\mathfrak{x}}' - \vartheta\,\bar{\mathfrak{x}}'', \\ \bar{\mathfrak{x}}_r' &= (1 - \tau + \vartheta')\,\bar{\mathfrak{x}}' + \vartheta\,\bar{\mathfrak{x}}'', \end{aligned}} \tag{3, 34}$$

oder mit Rücksicht auf die Frenetschen Formeln und die Definition der Streifeninvarianten (24) die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l' &= (1 + a)\,\bar{\mathfrak{t}} - b\,\bar{\mathfrak{h}}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_r' &= (1 - a)\,\bar{\mathfrak{t}} + b\,\bar{\mathfrak{h}}. \end{aligned}} \tag{3, 35}$$

Die Vektoren $\bar{\mathfrak{x}}_l'$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r'$ geben die *Tangentenrichtungen* der beiden parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ an. Sie spannen ein *Vektorparallelogramm* auf, das Verzerrungsparallelogramm des Streifens (Fig. 1). Seine Bedeutung liegt in folgendem

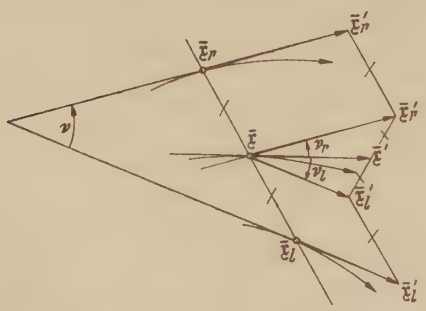

Fig. 1. Konstruktion des *Verzerrungsparallelogramms* eines Steifens.

Satz 13. *Das Verzerrungsparallelogramm gibt in anschaulicher Weise die lokalen isotropen Eigenschaften des Streifens wieder und enthält elementare Deutungen seiner isotropen Invarianten. Insbesondere kann man aus ihm in einfacher Weise ablesen die geodätische Windung a und die Normalkrümmung b des Streifens, ferner sein isotropes Bogenelement $d\bar{s}$ und das Bogenelement dS seines sphärischen Bildes, endlich den Grundriß der Tangente* $\mathfrak{t}$ *an die Kurve und den Grundriß* $\bar{\mathfrak{e}}$ *der dazu konjugierten Erzeugenden* $\mathfrak{e}$ *der Torse des Streifens.*

In der Tat geben die Halbdiagonalen des Verzerrungsparallelogramms

$$\text{(3, 36)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l' + \bar{\mathfrak{x}}_r'}{2} &= \bar{\mathfrak{x}}' = \bar{\mathfrak{t}}, \\ \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l' - \bar{\mathfrak{x}}_r'}{2} &= a\bar{\mathfrak{t}} - b\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{e}} \end{aligned}}$$

die Richtungen des *Grundrisses* $\bar{\mathfrak{t}}$ *der Tangente* $\mathfrak{t}$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ und jene des *Grundrisses* $\bar{\mathfrak{e}}$ *der Erzeugenden* $\mathfrak{e}$ *der Torse* des Streifens wieder. Wie Fig. 2 zeigt, können auch die *Invarianten a und b* aus dem Verzerrungsparallelogramm unmittelbar entnommen werden. Die *Normalkrümmung b* kann man nach der Formel

$$\text{(3, 37)} \qquad b = \tfrac{1}{2}\,[\bar{\mathfrak{x}}_l', \bar{\mathfrak{x}}_r']$$

auch als die halbe Fläche des Verzerrungsparallelogramms deuten.

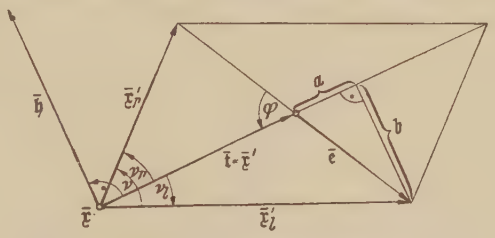

Fig. 2. Das *Verzerrungsparallelogramm* der parataktischen Abbildung eines Streifens im isotropen Raume enthält elementare Deutungen der isotropen Streifeninvarianten.

Ziehen wir noch die Winkel des Verzerrungsparallelogramms heran! Zunächst die Winkel zwischen dem Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}'$ der Kurventangente und den Tangenten $\bar{\mathfrak{x}}_l'$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r'$ an die parataktischen Bildkurven, die wir als den *linken und rechten Verzerrungswinkel* ν_l bzw. ν_r bezeichnen, und dazu noch den *totalen Verzerrungswinkel* $\nu = \nu_r - \nu_l$, der von den Tangenten der parataktischen Bildkurven eingeschlossen wird (Fig. 2). Es ist

$$\text{(3, 38)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\nu_l = \dfrac{[\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}_l']}{(\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}_l')} = -\dfrac{b}{1+a}, \\ \operatorname{tg}\nu_r = \dfrac{[\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}_r']}{(\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}_r')} = +\dfrac{b}{1-a}, \\ \operatorname{tg}\nu = \dfrac{[\bar{\mathfrak{x}}_l'\,\bar{\mathfrak{x}}_r']}{(\bar{\mathfrak{x}}_l'\,\bar{\mathfrak{x}}_r')} = \dfrac{2b}{1-a^2-b^2}. \end{cases}$$

Daraus gewinnt man, ausgedrückt durch die bekannten Verzerrungswinkel ν_l, ν_r, die gewünschten Formeln für die *geodätische Windung a* und die *Normalkrümmung b* des Streifens

$$\text{(3, 39)} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\operatorname{tg}\nu_r + \operatorname{tg}\nu_l}{\operatorname{tg}\nu_r - \operatorname{tg}\nu_l}, \\ b &= \frac{2\operatorname{tg}\nu_r \operatorname{tg}\nu_l}{\operatorname{tg}\nu_l - \operatorname{tg}\nu_r}. \end{aligned}}$$

Es sind das *Invarianten gegen simultane gleichwinklige Bewegungen der beiden Bildebenen*, d. h. nach Satz 7 in der Tat *parataktische Bilder von Bewegungsinvarianten des isotropen Raumes.*

Wir berechnen noch den Winkel φ, den die Tangente $\mathfrak{t}$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ mit ihrer konjugierten Tangente $\mathfrak{e}$ bildet. Aus der Darstellung (25) von $\mathfrak{e}$ folgt

$$(3,40)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{[\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\mathfrak{t}}]}{|\bar{\mathfrak{e}}|\cdot|\bar{\mathfrak{t}}|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\mathfrak{t}})}{|\bar{\mathfrak{e}}|\cdot|\bar{\mathfrak{t}}|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Auch dieser Winkel φ kann aus dem Verzerrungsparallelogramm entnommen werden als Winkel seiner Diagonalen.

Bevor wir uns der Berechnung der *Bogenelemente ds_l und ds_r der beiden parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ des Streifens* zuwenden, ist folgende Bemerkung nötig. Dem *Bogen* s der Streifenkurve steht *dual* der sogenannte *konische Winkel* S seiner Torse gegenüber. In anschaulicher Weise kann er als der *Bogen S des sphärischen Bildes* des Streifens auf der *isotropen Einheitskugel*

$$(3,41)\qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

erklärt werden, dessen Differential dS wir vorerst berechnen wollen.

Dieser sphärische Bildpunkt $\mathfrak{X}$ hat die Koordinaten

$$(3,42)\qquad \mathfrak{X}\begin{Bmatrix} X = p \\ Y = q \\ Z = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2). \end{Bmatrix}\bar{\mathfrak{X}},$$

Die Werte von p und q sind den Formeln (28) zu entnehmen, die wir jetzt *vektoriell* so schreiben können

$$(3,43)\qquad \bar{\mathfrak{X}} = z'\cdot\bar{\mathfrak{t}} + \left(\frac{z''}{\varkappa} - \vartheta\right)\cdot\bar{\mathfrak{h}}.$$

Durch Ableiten nach dem isotropen Bogen s der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ erhält man unter Beachtung der Vektoridentität (17) und der Formeln (24)

$$(3,44)\qquad \bar{\mathfrak{X}}' = b\,\bar{\mathfrak{t}} + a\,\bar{\mathfrak{h}}.$$

Darin steckt im Vergleich mit (25) das elementare Ergebnis, daß das sphärische Bild $\bar{\mathfrak{X}}'$ der Tangentenrichtung $\mathfrak{t}$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ *normal* ist zur konjugierten Tangentenrichtung $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{t}$.

Aus (43) folgt nun für das *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* $\mathfrak{X}$ des Streifens

$$(3,45)\qquad dS^2 = (a^2+b^2)\,ds^2.$$

Den Formeln (40) entnimmt man nun die folgenden einfachen Gleichungen für die *Streifeninvarianten* a und b

$$(3,46)\qquad \boxed{a = \frac{dS}{ds}\cdot\cos\varphi, \qquad b = \frac{dS}{ds}\cdot\sin\varphi.}$$

Für die Bogenelemente ds_l, ds_r der beiden parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ unseres nichtgeodätischen Streifens erhalten wir nun aus den Formeln (34)

$$(3,47)\qquad \begin{cases} ds_l^2 = \bar{\mathfrak{x}}_l'^2\, ds^2 = [(1+a)^2 + b^2]\, ds^2, \\ ds_r^2 = \bar{\mathfrak{x}}_r'^2\, ds^2 = [(1-a)^2 + b^2]\, ds^2, \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (40) und (45)

$$(3,48)\qquad \boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= ds^2 + dS^2 + 2\,ds\cdot dS\cdot\cos\varphi, \\ ds_r^2 &= ds^2 + dS^2 - 2\,ds\cdot dS\cdot\cos\varphi. \end{aligned}}$$

Auch die vier Bogenelemente ds, dS, ds_l, ds_r können also (Fig. 3) dem Verzerrungsparallelogramm unmittelbar entnommen werden.

Sie sind durch die Relation

$$(3,49)\quad ds_l^2 + ds_r^2 = 2\,(ds^2 + dS^2)$$

verbunden.

Es ist noch

$$(3,50)\quad ds_l^2 - ds_r^2 = 4\,a\,ds^2 = 4\,ds\,dS\cdot\cos\varphi.$$

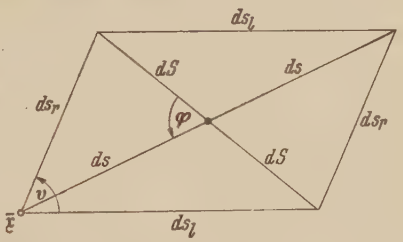

Fig. 3. Die Bogenelemente ds, dS, ds_l, ds_r als Diagonalen und Seiten des Verzerrungsparallelogramms.

Wir wenden uns nach diesen allgemeinen Entwicklungen nun einer Reihe wichtiger *Sonderfälle* zu.

19. Die parataktischen Bilder der (nichtgeodätischen) isotropen Krümmungsstreifen. Nichtgeodätische Krümmungsstreifen sind nach (24) durch verschwindende geodätische Windung

$$(3,51)\qquad a = 0$$

gekennzeichnet. Für ihre parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ ist dann zufolge (50)

$$(3,52)\qquad ds_l^2 = ds_r^2.$$

Im Verein mit den Ergebnissen der Nr. 18 folgt

Satz 14. *Die parataktischen Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ eines (zunächst noch nichtgeodätischen) isotropen Krümmungsstreifens sind zueinander isometrisch. Ihre von den Tangentenvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_l'$, $\bar{\mathfrak{x}}_r'$ aufgespannten Verzerrungsparallelogramme sind Rhomben und die Verzerrungswinkel $\nu_l = \sphericalangle(\bar{\mathfrak{x}}_l', \bar{\mathfrak{x}}')$*

und $\nu_r = \measuredangle(\bar{\mathfrak{x}}_r', \bar{\mathfrak{x}}')$ *sind gegengleich. Die Normalkrümmung des Krümmungsstreifens ist dabei nach* (38) *gleich der Tangente des halben totalen Verzerrungswinkels*

$$b = \frac{1}{R} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}. \tag{3, 53}$$

Auch im isotropen Raume gelten die (zueinander dualen) *Sätze von* Joachimsthal *und* Beltrami. Die geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eines Streifens ändert sich nämlich nicht, wenn man alle seine Flächenelemente um die Kurventangente $\mathfrak{x}'$ durch einen festen isotropen Winkel α dreht, d. h. ϑ durch $\vartheta + \alpha$ ersetzt. Aus einem Krümmungsstreifen ($a = 0$) entsteht dabei wieder ein Krümmungsstreifen (Satz von Joachimsthal). Verschiebt man dual die Flächenelemente eines Krümmungsstreifens in Richtung seiner Erzeugenden um feste Strecken, so entsteht gleichfalls wieder ein Krümmungsstreifen (Satz von Beltrami).

Der *ebene Schmiegstreifen* einer Kurve $\mathfrak{x}(s)$ in nichtisotroper Ebene ist zugleich *Krümmungsstreifen*. Denn für ihn ist $\tau = 0$ und $\vartheta = 0$, also ist $a = 0$. Drehen wir seine Schmiegelemente um die Kurventangenten um den festen isotropen Winkel α, so erhalten wir den *allgemeinen durch die ebene Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *legbaren Krümmungsstreifen*. Er ist ein Böschungsstreifen. Das parataktische Bild eines ebenen Schmiegstreifens besteht nach Satz 5 aus einem translationskongruent bezogenen Kurvenpaar $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$. *Die durch die ebene Kurve* $\mathfrak{x}$ *gelegten Krümmungsstreifen erscheinen daher im parataktischen Bild als zwei Äquitangentialkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*$ *des translationskongruenten Kurvenpaares* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$, wobei die festen Tangentenstrecken in beiden Bildern nach *verschiedenen* Seiten aufzutragen sind.

20. Die parataktische Abbildung der (nichtgeodätischen) Schmiegstreifen. Für den zur Kurve $\mathfrak{x}(s)$ gehörigen *Schmiegstreifen* fallen die Streifenelemente E mit den Schmiegelementen σ zusammen, also ist für ihn

$$\vartheta(s) = 0, \tag{3, 54}$$

und ebenso hat man für seine *Normalkrümmung*

$$b = 0. \tag{3, 55}$$

Die Formeln (33) lauten dann

$$\boxed{\bar{\mathfrak{x}}_l' = (1 + \tau)\,\bar{\mathfrak{x}}', \quad \bar{\mathfrak{x}}_r' = (1 - \tau)\,\bar{\mathfrak{x}}'.} \tag{3, 56}$$

Darin steckt der

Satz 15. *Die beiden parataktischen Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ *eines Schmiegstreifens* $\mathfrak{x}$ *sind durch parallele Tangenten aufeinander bezogen. Umgekehrt folgt aus* (38), *daß jedes parallel bezogene Kurvenpaar* $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ *als parataktisches Bildpaar eines Schmiegstreifens* $\mathfrak{x}$ *des isotropen Raumes aufgefaßt*

werden kann. Als Grenzfall sind darunter enthalten jene Schmiegstreifen, deren Torsion τ einen der festen Werte $\tau = \pm 1$ hat. Für sie reduziert sich nämlich nach (56), *je nachdem $\tau = +1$ oder $\tau = -1$ ist, das Rechts- oder Linksbild auf einen festen Punkt $\bar{\mathfrak{x}}_r$ oder $\bar{\mathfrak{x}}_l$. Der Schmiegstreifen $\mathfrak{x}$ gehört dann als Nullstreifen einem Rechts- oder Linksgewinde der Form* (1, 6) *oder* (1, 7) *an.*

Da ein Schmiegstreifen durch eine Trägerkurve bestimmt ist (und diese erst durch ihn als selbstduales Gebilde vollkommen erfaßt wird), folgt aus Satz **15** der

Satz 16. *Die Theorie der Kurven $\mathfrak{x}(s)$ nichtverschwindender Krümmung ($\varkappa \neq 0$) des isotropen Raumes stimmt überein mit der elementaren Geometrie der parallelbezogenen Kurvenpaare ($\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$) der Ebene.*

Wir verfolgen diese *Übertragung der isotropen Kurventheorie auf die Geometrie der parallelbezogenen Kurvenpaare* ein wenig. Aus (56) folgt durch skalares Quadrieren

$$(3,57) \qquad \bar{\mathfrak{x}}_l'^2 = (1+\tau)^2 \bar{\mathfrak{x}}'^2 \quad | \quad \bar{\mathfrak{x}}_r'^2 = (1-\tau)^2 \bar{\mathfrak{x}}'^2.$$

Wegen $\bar{\mathfrak{x}}'^2 = 1$ gewinnt man daraus für die Bogenelemente ds_l, ds_r der Bildkurven des Schmiegstreifens (nach geeigneter Übereinkunft über deren Sinne) die Formeln

$$(3,58) \qquad \boxed{ds_l = (1+\tau)\,ds} \quad | \quad \boxed{ds_r = (1-\tau)\,ds}$$

und daraus noch

$$(3,59) \qquad \boxed{ds = \frac{ds_l + ds_r}{2}}$$

und

$$(3,60) \qquad \tau\, ds = \frac{ds_l - ds_r}{2}.$$

Nun ist die Torsion τ einer Kurve auch erklärt durch die Formel

$$(3,61) \qquad \tau = \frac{dS}{ds},$$

wo dS den *Kontingenzwinkel der Schmiegebene* (= *Bogenelement des sphärischen Bildes*) bedeutet. Also gewinnt man aus (60) die Formel

$$(3,62) \qquad \boxed{dS = \frac{ds_l - ds_r}{2}.}$$

Wählt man für die Zählung von s, S, s_l, s_r korrespondierende Anfangspunkte so gelten also die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \frac{s_l + s_r}{2}, \qquad s_l = s + S, \\ S &= \frac{s_l - s_r}{2}, \qquad s_r = s - S, \end{aligned}} \tag{3, 63}$$

welche uns gestatten, aus den beiden parataktischen Bildern des *Schmiegstreifens* einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ deren isotrope *Bogenlänge* s und den *Bogen* S *ihres sphärischen Bildes* zu entnehmen.

Aber auch die *Krümmung* $\varkappa$ und die *Torsion* τ der Raumkurve kann ohne weiteres dem parallelbezogenen Bildpaare $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ ihres Schmiegstreifens entnommen werden. Denn wegen der Gleichheit des Kontingenzwinkels $d\varphi$ der Kurven $\bar{\mathfrak{x}}$, $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ ist

$$\frac{d\varphi}{ds_l} = \frac{d\varphi}{(1+\tau)\,ds}, \qquad \frac{d\varphi}{ds_r} = \frac{d\varphi}{(1-\tau)\,ds}, \tag{3, 64}$$

d. h. die Krümmungen $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ von $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ hängen mit $\varkappa$ so zusammen

$$\boxed{\varkappa_l = \frac{\varkappa}{1+\tau}} \quad \Big| \quad \boxed{\varkappa_r = \frac{\varkappa}{1-\tau}}. \tag{3, 65}$$

Daraus folgt

$$\varkappa = \frac{2\,\varkappa_l\,\varkappa_r}{\varkappa_l + \varkappa_r} \tag{3, 66}$$

oder, wenn wir zu den Krümmungsradien R, R_l, R_r der Kurve $\bar{\mathfrak{x}}$, $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ übergehen, wobei

$$R_l = (1+\tau)R \quad \Big| \quad R_r = (1-\tau)R \tag{3, 67}$$

ist,

$$\boxed{R = \frac{R_l + R_r}{2}}. \tag{3, 68}$$

Satz 17. *Der Krümmungsradius R der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l + \bar{\mathfrak{x}}_r}{2}$ zweier parallelbezogener Kurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Krümmungsradien R_l und R_r dieser Kurven.*

Die *Torsion* τ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ ergibt sich nach (59), (60), (65) zu

$$\boxed{\tau = \frac{ds_l - ds_r}{ds_l + ds_r} = \frac{R_l - R_r}{R_l + R_r}}. \tag{3, 69}$$

Die bisherigen allgemeinen Entwicklungen sollten als Vorbereitung des Studiums und der Konstruktion jener flächentreuen Abbildungen dienen, deren Mittenort aus einer krummen Linie besteht. Es wird aber wünschenswert sein, vor deren Darlegung noch eine Reihe einfacher *Beispiele*

zur Erläuterung und Anwendung obiger allgemeiner Tatsachen über die parataktische Abbildung von Schmiegstreifen kennenzulernen.

21. Die parataktische Abbildung der isotropen Schraublinien. Schmiegschraublinien einer Raumkurve. Es ist sehr leicht, die Richtigkeit des folgenden Satzes einzusehen:

Satz 18. *Zwei parallelbezogene Kreise* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ *mit verschiedenen Radien, deren einer sich auf einen Punkt reduzieren kann, sind stets das parataktische Bildpaar des Schmiegstreifens einer Schraublinie* $\mathfrak{x}(s)$ *des isotropen Raumes.*

Sind nämlich R_l und R_r die (vorzeichenbegabten) *Radien* der beiden Kreise, so folgt für die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ aus (66) und (69), daß ihre *Krümmung* $\varkappa$ *und Torsion* τ *konstant sind.* Die Kurve ist daher in der Tat eine *isotrope Schraublinie.* Dabei ist lediglich der Fall auszuschließen, daß $R_l + R_r = 0$ ist, d. h. die beiden Kreise durch *Spiegelung* an einem Punkte zusammenhängen. Die Flächenelemente umhüllen dann im Raum den Elementarkegel eines *isotropen Drehkegels. Dual* dazu ist der Fall $R_l - R_r = 0$, d. h. $\tau = 0$. Er führt auf den ebenen Schmiegstreifen eines *isotropen Kreises* in nichtisotroper Ebene. Im Bilde liegen zwei *translationskongruente Kreise* vor.

Danach kann auch sofort das *parataktische Bildpaar der isotropen Schmiegschraublinie einer Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ (nichtverschwindender Krümmung $\varkappa$) gefunden werden. Sind $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ die parallelbezogenen Bilder der Raumkurve $\mathfrak{x}$, so besteht das Bildpaar der Schmiegschraublinie einfach aus den *parallelbezogenen Schmiegkreisen* c_l *und* c_r *der Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$.

22. Die parataktische Abbildung ebener Schmiegstreifen (Planare Streifen). Wir setzen voraus, daß die Ebene des Streifens *nichtisotrop* sei. Nach Satz 5 sind die *parataktischen Bilder* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ eines planaren Streifens zueinander und zum Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ der ebenen Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *translationskongruent.*

In der Tat folgt dies auch aus den Formeln (56). Für die Bilder planarer Streifen ist nämlich wegen $\tau = 0$

$$\bar{\mathfrak{x}}_l' = \bar{\mathfrak{x}}' = \bar{\mathfrak{x}}', \tag{3, 70}$$

also, wenn $\bar{\mathfrak{a}}$ einen konstanten Vektor bedeutet,

$$\bar{\mathfrak{x}}_l = \bar{\mathfrak{x}} + \bar{\mathfrak{a}} \quad \bar{\mathfrak{x}}_r = \bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}}, \tag{3, 71}$$

wie oben behauptet wurde.

23. Die parataktischen Bilder der isotropen Böschungslinien. Auch im isotropen Raume sind *Böschungslinien* durch *festes Verhältnis von Krümmung und Torsion* gekennzeichnet. Wir beweisen

Satz 19. *Die parataktischen Bilder* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ *des Schmiegstreifens einer isotropen Böschungslinie* $\mathfrak{x}(s)$ *bestehen aus einem Paare von Parallelkurven, das aufeinander durch parallele Tangenten bezogen ist, oder einem daraus durch simultane Schiebungen entstehenden Kurvenpaar.*

Für ein solches Kurvenpaar ist nämlich

(3, 72) $$R_l - R_r = 2h = \text{const},$$

d. h. aber nach (67)

(3, 73) $$R\tau = h$$

oder

(3, 74) $$\frac{\tau}{\varkappa} = h = \text{const}.$$

Das ist aber das *Kennzeichen der isotropen Böschungslinien.* Auch die (oben formulierte) Umkehrung trifft zu.

24. Die parataktischen Bilder der Schmiegstreifen fester Torsion. Für solche Streifen ist neben $\vartheta = 0$

(3, 75) $$\tau = \tau_0 = \text{const}.$$

Sollen sie über dem Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ errichtet werden, so ist

(3, 76) $$\bar{\mathfrak{x}}_l' = (1 + \tau_0)\,\bar{\mathfrak{x}}' \quad | \quad \bar{\mathfrak{x}}_r' = (1 - \tau_0)\,\bar{\mathfrak{x}}'$$

und daher lauten die Bilder selbst

(3, 77) $$\bar{\mathfrak{x}}_l = (1 + \tau_0)\,\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}} \quad | \quad \bar{\mathfrak{x}}_r = (1 - \tau_0)\,\bar{\mathfrak{x}} + \bar{\mathfrak{a}},$$

unter $\bar{\mathfrak{a}}$ einen beliebigen konstanten Vektor verstanden.

Es folgt daraus

Satz 20. *Die beiden parataktischen Bilder $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ eines Schmiegstreifens der festen Torsion τ_0 sind zueinander ähnliche und ähnlich-gelegene Kurven, die aus dem Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ der Gratlinie $\mathfrak{x}(s)$ des Schmiegstreifens durch zentrische Ähnlichkeiten vom Modul $(1 + \tau_0)$ bzw. $(1 - \tau_0)$ hervorgehen. Das Zentrum der Ähnlichkeiten ist dabei der Nullpunkt N der Bildebene z bezüglich des Gewindes*

(3, 78) $$dz = A\,dx + B\,dy + \tau_0\,(x\,dy - y\,dx),$$

in welchem der Schmiegstreifen $\mathfrak{x}$ als Nullstreifen enthalten ist.

Die Sonderfälle, wo $\tau = \pm 1$ ist, kamen bereits in Nr. **20** zur Sprache. In ihnen reduziert sich eine der beiden Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$ oder $\bar{\mathfrak{x}}_r$ auf den Nullpunkt N.

25. Die parataktischen Bilder isotroper Bertrand-Kurven. Auch für isotrope *Bertrand-Kurven*[16, I]) ist das Bestehen einer *linearen Relation*

(3, 79) $$A\varkappa + B\tau = 1$$

zwischen Krümmung und Torsion mit konstanten Koeffizienten A, B kennzeichnend. Aus ihr folgt im Hinblick auf (66), (67) und (69) *als kennzeichnend*

für die Krümmungsradien R_l, R_r der parataktischen Bilder $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ eines Bertrandschen *Schmiegstreifens die Relation*

$$\boxed{\alpha R_l + \beta R_r = 1,}$$

(3, 80)

$$\alpha = \frac{1-B}{2A}, \qquad \beta = \frac{1+B}{2A}.$$

Ist $\mathfrak{x}^*$ die zur Kurve $\mathfrak{x}$ *assoziierte* Bertrand-*Kurve*, so bestehen zwischen den parataktischen Bildern $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ und $\bar{\mathfrak{x}}_l^*$, $\bar{\mathfrak{x}}_r^*$ die Beziehungen

(3, 81)
$$\bar{\mathfrak{x}}_l^* = \bar{\mathfrak{x}}_l - \frac{A(1-B)}{B}\,\bar{\mathfrak{y}}_l, \quad \Big| \quad \bar{\mathfrak{x}}_r^* = \bar{\mathfrak{x}}_r + \frac{A(1+B)}{B}\,\bar{\mathfrak{y}}_r,$$

unter $\bar{\mathfrak{y}}_l$, $\bar{\mathfrak{y}}_r$ die zu den Kurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ normalen Einheitsvektoren verstanden. Es folgt daraus

Satz 21. *Die linken Bilder $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_l^*$ und ebenso die rechten Bilder $\bar{\mathfrak{x}}_r$, $\bar{\mathfrak{x}}_r^*$ der Schmiegstreifen zweier assoziierter* Bertrand-*Kurven $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^*$ des isotropen Raumes sind Paare von Parallelkurven, die sämtlich aufeinander parallel bezogen sind.*

26. Äquimetrische Streifen und ihre parataktischen Bilder. Als letzte bemerkenswerte Anwendung behandeln wir jene (nichtgeodätischen) *Streifen, deren parataktische Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ durch orthogonale Tangenten aufeinander bezogen sind.*

Nach (33) ist für sie

(3, 82)
$$\bar{\mathfrak{x}}_l' \cdot \bar{\mathfrak{x}}_r' = 1 - a^2 - b^2 = 0,$$

d. h.

(3, 83)
$$\boxed{a^2 + b^2 = 1.}$$

Da nach (45) das Bogenelement dS des sphärischen Bildes durch

$$dS^2 = (a^2 + b^2)\,ds^2$$

gegeben ist, sind unsere besonderen Streifen auch durch die Forderung

(3, 84)
$$dS^2 = ds^2,$$

d. h. durch die *Forderung gleicher Länge der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ und ihres sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$* gekennzeichnet.

Wir wollen daher diese Streifen „*äquimetrisch*" nennen. Sie werden für uns später Bedeutung gewinnen.

Nach (47) gewinnt man für die Bogenelemente der Bildkurven eines äquimetrischen Streifens

(3,85)
$$ds_l^2 = 2(1+a)\,ds^2 \;\Big|\; ds_r^2 = 2(1-a)\,ds^2.$$

Es folgt daraus z. B., daß ein *äquimetrischer Streifen* dann und nur dann auch *Schmiegstreifen* ($b = 0$) ist, wenn seine geodätische Windung $a = \pm 1$

ist, d. h. wenn er als *Nullstreifen einem Links- oder Rechtsgewinde* angehört. Sein *Links- bzw. Rechtsbild* reduziert sich nämlich dann notwendig auf einen festen *Punkt*.

Soll dagegen ein *äquimetrischer Streifen zugleich Krümmungsstreifen* ($a = 0$) sein, so ist seine Normalkrümmung b konstant, nämlich $b = \pm 1$. Seine *Meusnierschen Kugeln* haben sämtlich den festen Parameter $p = \pm 1$. *Der Streifen ist einer isotropen Kugel vom Parameter* $p = \pm 1$ *aufgeschrieben*. Seine beiden parataktischen *Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ entstehen daher auseinander durch eine *Vierteldrehung*.

Auf jene allgemeineren *Streifen*, deren parataktische Bildkurven einander so entsprechen, daß zugeordnete Tangenten einen *festen (Verzerrungs-) Winkel* $\nu = \nu_0$ bilden, sei hier nur hingewiesen. Sie sind nach (37) durch die Gleichung

$$\frac{2b}{1 - a^2 - b^2} = \operatorname{tg} \nu_0 = \text{const.} \tag{3, 86}$$

gekennzeichnet.

27. Konstruktion und Struktur der flächentreuen Abbildungen mit krummlinigen Mittenkurven $\bar{\mathfrak{x}}$. Nach Satz 11 kann die allgemeinste flächentreue Abbildung dieser Art erhalten werden als parataktisches Bild des Elementvereines einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ vom krummen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$. Die Raumkurve sei durch einen ihrer Streifen $\mathfrak{x}^*$ festgelegt, den wir als ihren *Grundstreifen* bezeichnen. $\mathfrak{x}$ heiße auch ein *beliebiger Streifen* durch sie, $\mathfrak{x}_0$ sei ihr *Schmiegstreifen*. Die parataktischen Bilder sind dann nach (29) durch die Formeln

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_l = \bar{\mathfrak{x}} - \vartheta \bar{\mathfrak{x}}' + \dfrac{z''}{\varkappa} \bar{\mathfrak{x}}' - \dfrac{z'}{\varkappa} \bar{\mathfrak{x}}'', \\ \bar{\mathfrak{x}}_r = \bar{\mathfrak{x}} + \vartheta \bar{\mathfrak{x}}' - \dfrac{z''}{\varkappa} \bar{\mathfrak{x}}' + \dfrac{z'}{\varkappa} \bar{\mathfrak{x}}'' \end{cases} \tag{3, 87}$$

gegeben, welche für variable ϑ die *flächentreue Abbildung* $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ beschreiben. Für $\vartheta = 0$ erhält man daraus die parallelbezogenen Bilder $(\bar{\mathfrak{x}}_{0l}, \bar{\mathfrak{x}}_{0r})$ des *Schmiegstreifens*, und für $\vartheta = \vartheta^*$ mögen sich die Bilder $(\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*)$ des *Grundstreifens* $\mathfrak{x}^*$ ergeben.

Ist $\Theta = \vartheta - \vartheta^*$ die Neigung der Elemente von $\mathfrak{x}$ gegen die Elemente des Grundstreifens $\mathfrak{x}^*$, so hat man

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l &= \bar{\mathfrak{x}}_l^* - \Theta \bar{\mathfrak{x}}', \\ \bar{\mathfrak{x}}_r &= \bar{\mathfrak{x}}_r^* + \Theta \bar{\mathfrak{x}}'. \end{aligned}} \tag{3, 88}$$

Daraus fließt die folgende

Allgemeine Konstruktion der eigentlich-flächentreuen Verwandtschaften $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ der Ebene mit krummer Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$, *aus einem Paare entsprechender „Leitkurven" $(\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*)$, deren eine sich auf einen Punkt redu-*

zieren kann: Man trage, um alle Punktepaare $(\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r)$ *der Verwandtschaft zu erhalten, von entsprechenden Punkten der gegebenen Leitkurven* $(\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*)$ *gleiche Vielfache* $\Theta\,\bar{\mathfrak{x}}'$ *des jeweiligen normierten Tangentenvektors* $\bar{\mathfrak{x}}'$ *der (krummen) Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l^* + \bar{\mathfrak{x}}_r^*}{2}$ *auf, und zwar nach verschiedenen Seiten* (Fig. 4).

Wählt man insonderheit als Grundstreifen $\mathfrak{x}^*$ *den Schmiegstreifen* $\mathfrak{x}_0$ $(\vartheta = 0)$ *der Kurve* $\mathfrak{x}(s)$, *so sind seine Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$, *die Leitkurven der flächentreuen Abbildung, durch parallele Tangenten aufeinander (und auf die Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$) *bezogen* (Fig. 5).

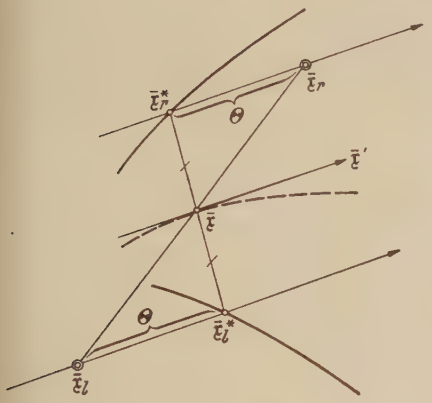

Fig. 4. Allgemeine Konstruktion der eigentlich-flächentreuen Verwandtschaft $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ mit krummer Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$.

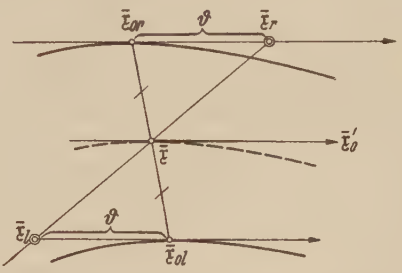

Fig. 5. Konstruktion der eigentlich-flächentreuen Verwandtschaft $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ mit krummer Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ mittels parallel bezogener Leitkurven $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$ und $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$.

War dagegen der Grundstreifen $\mathfrak{x}^*$ *ein isotroper Krümmungsstreifen, so sind die Leitkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l^*$, $\bar{\mathfrak{x}}_r^*$ *der flächentreuen Abbildung zueinander isometrisch und die Konstruktion liefert für feste Werte von* Θ *nach dem* Joachimsthalschen *Satze die übrigen Paare (krummer) isometrischer Linien der Verwandtschaft.*

28. Konstruktion der isometrischen Linien im Falle parallelbezogener Leitkurven. Beispiel der Kurven fester Torsion. Sind $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$ die Bilder der Schmiegelemente der Kurve $\mathfrak{x}(s)$, so ergeben die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{x}}_l = \bar{\mathfrak{x}}_{0l} - \vartheta\,\bar{\mathfrak{x}}' \quad \Big| \quad \bar{\mathfrak{x}}_r = \bar{\mathfrak{x}}_{0r} + \vartheta\,\bar{\mathfrak{x}}' \tag{3, 89}$$

die Darstellung der *flächentreuen Abbildung* $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ an Hand der *parallelbezogenen Leitkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}(s)$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}(s)$.

Die durch die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ legbaren *isotropen Krümmungsstreifen* $\mathfrak{x}^*$, d. h. im Bilde, die (krummen) isometrischen Linien $(\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*)$ sind durch die Forderung $a = \tau - \vartheta' = 0$, d. h. durch die Formel

$$\vartheta = \int_0^s \tau\, ds + \vartheta^* \tag{3, 90}$$

gekennzeichnet, unter ϑ^* den Neigungswinkel des Krümmungsstreifens $\mathfrak{x}^*$ gegen den Schmiegstreifen $\mathfrak{x}_0$ an der Stelle $s = 0$ verstanden.

Bedeutet dS den *Kontingenzwinkel der Schmiegebene* der Kurve $\mathfrak{x}(s)$, so ist

$$\tau = \frac{dS}{ds}, \tag{3, 91}$$

d. h.

$$\vartheta = S + \vartheta^*. \tag{3, 92}$$

Nun läßt sich S nach (63) durch die Bogen s_l, s_r der Bildkurven $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$ des Schmiegstreifens $\mathfrak{x}_0$ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ ausdrücken. Man hat

$$S = \frac{s_l - s_r}{2}, \tag{3, 93}$$

also

$$\vartheta = \frac{s_l - s_r}{2} + \vartheta^*, \tag{3, 94}$$

so daß sich die *isometrischen Linien* durch die folgenden Formeln ergeben

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_l^* = \bar{\mathfrak{x}}_{0l} - \left(\frac{s_l - s_r}{2} + \vartheta^*\right) \bar{\mathfrak{t}}_{0l}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_r^* = \bar{\mathfrak{x}}_{0r} + \left(\frac{s_l - s_r}{2} + \vartheta^*\right) \bar{\mathfrak{t}}_{0r}, \end{cases} \tag{3, 95}$$

wenn $\bar{\mathfrak{t}}_{0l} = \bar{\mathfrak{t}}_{0r} = \bar{\mathfrak{x}}'$ die parallelen, normierten Tangentenvektoren der Leitlinien $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$ bedeuten.

Daraus fließt die folgende einfache *Konstruktion der krummen isometrischen Kurvenpaare einer flächentreuen Abbildung mit krummer Mittenkurve*. Es seien $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$ und $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$ die beiden *parallelbezogenen Leitkurven* der Abbildung, s_l, s_r ihre Bogen, $\bar{\mathfrak{t}}_{0l} = \bar{\mathfrak{t}}_{0r}$ ihre normierten Tangentenvektoren. Trägt man dann auf den Tangenten korrespondierender Punkte der Leitkurven $\bar{\mathfrak{x}}_{0l}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{0r}$ nach verschiedenen Seiten die um eine willkürliche Konstante ϑ^* vermehrte *halbe Differenz der abgelaufenen Bogen der Leitkurven* ab, so erhält man die gesuchten krummen isometrischen Linien der Abbildung.

Als *Beispiel* behandeln wir kurz die *isometrischen Linien* der flächentreuen Abbildung, welche zu einer *Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ der *festen Torsion* $\tau = \tau_0 \neq 0$ gehört. *Deren Leitkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ sind nach Satz 20 zueinander *zentrisch ähnlich*. Aus (76) schließt man in diesem Falle

$$\frac{s_l - s_r}{2} = \begin{cases} \frac{\tau_0}{1 + \tau_0} \cdot s_l \\ \frac{\tau_0}{1 - \tau_0} \cdot s_r \end{cases} \tag{3, 96}$$

und gewinnt daraus die folgende *Darstellung der isometrischen Linien*:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l^* &= \bar{\mathfrak{x}}_{0l} - \left(\frac{\tau_0 s_l}{1 + \tau_0} + \vartheta^*\right) \bar{\mathfrak{t}}_{0l}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_r^* &= \bar{\mathfrak{x}}_{0r} + \left(\frac{\tau_0 s_r}{1 - \tau_0} + \vartheta^*\right) \bar{\mathfrak{t}}_{0r}. \end{aligned} \tag{3, 97}$$

Diese isometrischen Linien $\bar{\mathfrak{x}}_l^*$, $\bar{\mathfrak{x}}_r^*$ sind sogenannte *unvollkommene oder allgemeine Evolventen*[21]) *der beiden Leitlinien* $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$; sie entstehen nämlich aus $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ durch Anwendung der bekannten *Fadenkonstruktion* der Evolventen, wobei jedoch auf den Kurventangenten *nicht* der *volle* abgelaufene Bogen s_l bzw. s_r aufgetragen wird, sondern nur der *feste Bruchteil* (96) dieses Bogens.

Insbesondere erhält man, ausgehend von einer *isotropen Schraublinie*, als *isometrische Linien* der zugehörigen (drehsymmetrischen) flächentreuen Abbildung *verallgemeinerte Kreisevolventen*[22]).

29. Bemerkung über die metrisch dualen Vereine und ihre parataktische Abbildung. Durch unsere bisherigen Studien ist auch die Theorie gewisser flächentreuer Abbildungen mit *flächenhaftem Mittenort* erledigt, nämlich jener, welche durch *parataktische Abbildung einer* (weder zylindrischen noch konischen) *Torse* entstehen.

Übt man nämlich auf den Verein der Flächenelemente einer Kurve der Krümmung $\varkappa \neq 0$ und der Torsion $\tau \neq 0$ die *Dualität eines Links- oder Rechtsgewindes* aus, so entsteht der Verein der Flächenelemente einer (weder zylindrischen noch konischen) Torse, deren Gratlinie die Krümmung $\frac{\varkappa}{\tau}$ und die Torsion $\frac{1}{\tau}$ besitzt. Von den *Bildern* wird dabei nach Satz 8 lediglich das linke oder rechte an dem betreffenden Nullpunkt *gespiegelt* und kann daher als bekannt gelten.

30. Konische Vereine und ihre parataktischen Bilder. Im isotropen Raume mit seinem metrischen Dualitätsprinzip steht der Geometrie der *planaren Streifen* (= *ebenen Schmiegstreifen*) dual die Geometrie der *konischen Vereine* gegenüber, d. h. jener Vereine, deren Flächenelemente denselben *Punkt* $\mathfrak{x}$ gemeinsam haben und daher einen *Elementarkegel* umhüllen. Wir wollen im folgenden deren einfache isotrope Theorie in kurzen Zügen entwickeln, vor allem deswegen, weil damit auch die *isotrope Theorie der flächentreuen Abbildungen mit einem Punkte als Mittenort* erledigt ist.

Satz 22. *Die parataktischen Bilder eines konischen Vereines bestehen aus zwei zueinander zentrisch symmetrischen Kurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$, *deren Symmetriezentrum der Grundriß* $\bar{\mathfrak{x}}$ *von* $\mathfrak{x}$ *ist.*

Der konische Verein ist gegeben durch den festen Punkt $\mathfrak{x}$ und die *Stellungsparameter* $p(S)$, $q(S)$ seiner Flächenelemente, die wir zu einem *Vektor*

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(S) \begin{cases} p = p(S) \\ q = q(S) \end{cases} \tag{3, 98}$$

[21]) Über *unvollkommene Evolventen* vgl. G. LORIA, Spezielle ebene und transzendente Kurven, Leipzig 1902, S. 636.

[22]) Über sie vgl. H. WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1901, S. 245.

zusammenfassen. Der „*natürliche*“ *Parameter* S soll dabei durch die Gleichung

$$dS^2 = dp^2 + dq^2 \tag{3, 99}$$

erklärt sein. Er stimmt mit dem *Bogen des sphärischen Bildes des Vereines* überein. dS ist also auch der isotrope Kontingenzwinkel benachbarter Flächenelemente und S wird daher oft auch als der „*konische Winkel*“ des Kegels bezeichnet. Es ist

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = p'^2 + q'^2 = 1, \tag{3, 100}$$

also

$$\bar{\mathfrak{x}}' \cdot \bar{\mathfrak{x}}'' = p'p'' + q'q'' = 0. \tag{3, 101}$$

Man kann daher

$$\left.\begin{aligned} p'' &= -\,\mathsf{K}q' \\ q'' &= +\,\mathsf{K}p' \end{aligned}\right\} \tag{3, 102}$$

setzen und gewinnt als *isotropes Maß für die Krümmung* des konischen Vereines die Invariante

$$\mathsf{K} = [\bar{\mathfrak{x}}', \bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} p' & q' \\ p'' & q'' \end{vmatrix}, \tag{3, 103}$$

deren *geometrische Bedeutung* durch die Gleichung

$$\mathsf{K} = \frac{d\varphi}{dS} \tag{3, 104}$$

ausgedrückt werden kann, unter $d\varphi$ den *Winkel zweier Nachbarerzeugenden* des Elementarkegels verstanden.

Satz 23. *Durch die natürliche Gleichung*

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}(S) \tag{3, 105}$$

ist ein konischer Verein bis auf isotrope Bewegungen eindeutig festgelegt. Insbesondere erhält man für

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_0 = \text{const} \; (\neq 0) \tag{3, 106}$$

den konischen Verein eines isotropen Drehkegels. Dagegen ist

$$\mathsf{K} = 0 \tag{3, 107}$$

kennzeichnend für die Flächenelemente eines axialen Büschels.

Denn diese Gleichung (107) zieht wegen (100) $p'' = q'' = 0$ nach sich und man hat

$$\left.\begin{aligned} p &= AS + B \\ q &= CS + D \end{aligned}\right\} \; A^2 + C^2 = 1, \tag{3, 108}$$

worin die Behauptung steckt.

Krümmung K *und konischer Winkel* S *des konischen Vereines finden ihre elementare Deutung auch im parataktischen Bilde.* Sind (x, y, z) die (konstanten) Koordinaten des Kegelscheitels $\mathfrak{x}$, so gewinnt man die Bildpunkte

$$(3,109)\qquad \bar{\mathfrak{X}}_l \begin{cases} x_l = x + q(S), \\ y_l = y - p(S), \end{cases} \quad \bar{\mathfrak{X}}_r \begin{cases} x_r = x - q(S), \\ y_r = y + p(S). \end{cases}$$

Es folgt

$$(3,110)\qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{X}}_l' = (q', -p') = -\bar{\mathfrak{X}}'', \\ \bar{\mathfrak{X}}_r' = (-q', p') = +\bar{\mathfrak{X}}'', \end{cases}$$

und daraus folgt wegen $\bar{\mathfrak{X}}'^2 = 1$ für die *Bogenelemente* dS_l, dS_r der beiden parataktischen Bilder des konischen Streifens

$$(3,111)\qquad \begin{cases} dS_l^2 = \bar{\mathfrak{X}}_l'^2\, dS^2 = dS^2, \\ dS_r^2 = \bar{\mathfrak{X}}_r'^2\, dS^2 = dS^2, \end{cases}$$

und für die *Bogen* selber

$$(3,112)\qquad \boxed{S_l = S_r = S.}$$

Daraus gewinnt man für die *Krümmungen* $\varkappa_l$, $\varkappa_r$ der Bildkurven

$$(3,113)\qquad \begin{cases} \varkappa_l = [\bar{\mathfrak{X}}_l' \bar{\mathfrak{X}}_l''] = \mathsf{K} \\ \varkappa_r = [\bar{\mathfrak{X}}_r' \bar{\mathfrak{X}}_r''] = \mathsf{K}, \end{cases}$$

also

$$(3,114)\qquad \boxed{\varkappa_l = \varkappa_r = \mathsf{K}.}$$

Für die *Kontingenzwinkel* $d\varphi_l$, $d\varphi_r$ der Tangenten der Bildkurven gilt also

$$(3,115)\qquad \boxed{d\varphi_l = d\varphi_r = d\varphi,}$$

wenn $d\varphi$ den Winkel der entsprechenden Kegelerzeugenden bedeutet. Zusammengefaßt gilt

Satz 24. *Konischer Winkel* S, *Kontingenzwinkel der Erzeugenden* $d\varphi$ *und Krümmung* K *eines konischen Elementvereines erscheinen im parataktischen Bilde als Bogen* $s_l = s_r$, *Kontingenzwinkel der Tangenten* $d\varphi_l = d\varphi_r$ *und Krümmung* $\varkappa_l = \varkappa_r$ *seiner beiden (zentrisch symmetrischen) Bildkurven.*

Z. B. besteht das parataktische Bildpaar des konischen Vereines eines isotropen Drehkegels ($\mathsf{K} = \text{const} \neq 0$) *aus zwei zentrisch-symmetrischen Kreisen der Krümmung* K, *und ähnlich das Bildpaar eines axialen Elementenbüschels* ($\mathsf{K} = 0$) *aus zwei zentrisch-symmetrischen geradlinigen Punktreihen auf parallelen Trägern.*

Jeder *konische Verein* kann (so wie dual jeder planare Verein) *zugleich* als *Schmiegstreifen* und als *isotroper Krümmungsstreifen* aufgefaßt werden. Seine Bildkurven sind zugleich tangentenparallel und isometrisch aufeinander bezogen, so daß unsere Sätze **14** und **15** auch für konische Vereine gültig sind.

IV. Die Geometrie und parataktische Abbildung der geodätischen Streifen des isotropen Raumes. Die flächentreuen Verwandtschaften mit geradlinigen Mittenort.

31. Die parataktische Abbildung des Elementvereines einer Kurve verschwindender Krümmung. Eine Kurve $\mathfrak{x}(s)$ mit

$$\varkappa = 0, \quad \text{d. h.} \quad x'' = y'' = 0 \tag{4, 1}$$

hat *geradlinigen Grundriß* und liegt in einer *isotropen Ebene*. Ihre Krümmungsverhältnisse werden durch die Invariante

$$\varkappa^* = z''(s), \tag{4, 2}$$

ihre isotrope *Normalkrümmung* beschrieben.

Um ihre *berührenden Flächenelemente* E analytisch zu fixieren, kann man sich nicht mehr der Neigung ϑ von E gegen die (isotrope) Schmiegebene bedienen, denn diese wäre unendlich groß. Wir werden vielmehr, um eine Vergleichsbasis zu haben, durch die Kurve zuerst einen *zylindrischen Streifen* legen, am besten einen solchen, dessen *Erzeugenden* $\mathfrak{c}$ *zur Kurvenebene im isotropen Sinne normal* sind, etwa des Vektors

$$\mathfrak{c} = \{-y'(s),\ x'(s),\ 0\}. \tag{4, 3}$$

Alle möglichen *zylindrischen Normalstreifen* durch $\mathfrak{x}(s)$ sind im isotropen Sinne zueinander *bewegungskongruent*; sie gehen nämlich auseinander hervor durch die *Gruppe der vollisotropen Scherungen* längs der isotropen Kurvenebene.

Die *Normale* $\mathfrak{y}$ jedes weiteren Berührungselementes E der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ kann also in die Form gesetzt werden:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{c} + \gamma \cdot \mathfrak{b}, \tag{4, 4}$$

wo γ den *Winkel* des beliebigen Flächenelementes gegen das Element E_0 des festen zylindrischen Normalstreifens und $\mathfrak{b}$ den vollisotropen *Hauptnormalenvektor* bedeutet, der mit dem isotropen *Binormalenvektor* zusammenfällt.

$\mathfrak{y}$ legt zusammen mit der Tangente $\mathfrak{x}'$ das Berührungselement E der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ eindeutig fest.

Die beiden Parameter s und γ gestatten jetzt, alle *Berührungselemente* E der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ zu beschreiben. Für deren *Stellungsparameter* (p, q) erhält man dabei

$$\begin{cases} p = x'z' - \gamma\, y' \\ q = y'z' + \gamma\, x'. \end{cases} \tag{4, 5}$$

Daher ergeben sich die folgenden beiden *parataktischen Bildpunkte* (E_l, E_r) des Berührungselementes E

$$E_l \begin{cases} x_l = x + y'z' + \gamma \cdot x', \\ y_l = y - x'z' + \gamma \cdot y', \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - y'z' - \gamma\, x', \\ y_r = y + x'z' - \gamma\, y', \end{cases} \tag{4, 6}$$

die wir wieder *vektoriell* so schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{\mathfrak{x}}_l &= \bar{\mathfrak{x}} - z' \cdot \bar{\mathfrak{c}} + \gamma \cdot \bar{\mathfrak{x}}',\\ \bar{\mathfrak{x}}_r &= \bar{\mathfrak{x}} + z' \cdot \bar{\mathfrak{c}} - \gamma \cdot \bar{\mathfrak{x}}'.\end{aligned}} \tag{4, 7}$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminanten

$$\boxed{\frac{\partial (x_l, y_l)}{\partial (s, \gamma)} = \frac{\partial (x_r, y_r)}{\partial (s, \gamma)} = \varkappa^*} \tag{4, 8}$$

und folgern aus deren Gleichheit

Satz 25. *Die parataktischen Bildpunkte $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ der ∞^2 berührenden Flächenelemente $E(s, \gamma)$ einer krummen Kurve $\mathfrak{x}(s)$ aus einer isotropen Ebene ($\varkappa = 0$, $\varkappa^* \neq 0$) vermitteln eine eigentlich-flächentreue Abbildung der Bildebene. Diese ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Mitten $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\bar{\mathfrak{x}}_l + \bar{\mathfrak{x}}_r}{2}$ der Bildpaare auf einer Geraden liegen, nämlich auf dem Grundriß der Kurve $\mathfrak{x}(s)$. Die Abbildung ist singulär nur für die (nichtvollisotropen) geraden Linien ($\varkappa^* = 0$), deren parataktisches Bild, wie bekannt, aus zwei parallelen Geraden besteht.*

32. Die isotrope Geometrie der geodätischen Streifen und ihre parataktische Abbildung. Ist in (4)

$$\gamma = \gamma(s), \tag{4, 9}$$

so beschreibt das Flächenelement E einen durch die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ gelegten *Streifen*. Es ist dies, wegen des geradlinigen Grundrisses von $\mathfrak{x}(s)$ im Sinne der isotropen Metrik (2, 2) der *allgemeine geodätische Streifen* des isotropen Raumes. Sein parataktisches Abbild ist das *Kurvenpaar* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$, (7), das durch die Eigenschaft gekennzeichnet ist, die *gerade Linie* $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ als *Mittenort* zu besitzen. *Die elementaren Invarianten dieses Kurvenpaares spiegeln dabei die isotropen Invarianten des geodätischen Streifens wider*, über die wir uns zunächst orientieren wollen:

Wählt man die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{b}$ als *begleitendes Dreibein* des geodätischen Streifens, so lauten dessen *Ableitungsgleichungen*

$$\boxed{\mathfrak{t}' = \varkappa^*(s) \cdot \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{y}' = \gamma'(s) \cdot \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{o}.} \tag{4, 10}$$

Die hier auftretenden Größen, nämlich

$$\begin{aligned}&1.\ \textit{die geodätische Windung}\quad a = \gamma'(s),\\ &2.\ \textit{die Normalkrümmung}\quad\ b = \varkappa^*(s)\end{aligned} \tag{4, 11}$$

sind isotrope *Invarianten des geodätischen Streifens* und legen ihn bis auf isotrope Bewegungen eindeutig fest. Insbesondere kennzeichnet $\varkappa^*(s) = 0$ die *geradlinigen Streifen*.

Wieder stimmt (vgl. Satz 11)

$$R = \frac{1}{b} = \frac{1}{\varkappa^*} \tag{4, 12}$$

mit dem Parameter p der isotropen MEUSNIER-Kugel des Streifens überein

Auch a kann sofort gedeutet werden: Es ist der isotrope *Drall der Regelfläche*, welche von den Streifennormalen $\mathfrak{y}$ gebildet wird. In der Tat ist

$$a = \frac{d\gamma}{ds}, \tag{4, 13}$$

worin $d\gamma$ die Neigung benachbarter Erzeugenden $\mathfrak{y}$ und ds ihren Abstand bedeutet.

Mit Hilfe dieser Invarianten kann man den *Vektor* $\mathfrak{e}$ *der Erzeugenden des Streifens* wieder durch die Formel

$$\mathfrak{e} = a\,\mathfrak{t} - b\,\mathfrak{y} \tag{4, 14}$$

darstellen.

Satz 26. *Die Forderung*

$$a = \gamma'(s) = 0, \tag{4, 15}$$

d. h.

$$\gamma = \text{const} \tag{4, 16}$$

kennzeichnet die geodätischen Krümmungsstreifen. Es sind das jene zylindrischen Streifen, welche die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *als Normalschnitt besitzen.*

Ähnlich kennzeichnet

$$b = \varkappa^*(s) = 0 \tag{4, 17}$$

die geodätischen Schmiegstreifen. Diese fallen mit den geradlinigen Streifen zusammen, deren Trägergeraden nicht vollisotrop sind.

Die *isotropen Invarianten* auch der geodätischen Streifen lassen sich wieder unmittelbar als *elementare Invarianten* der beiden parataktischen Bildkurven deuten, wobei unsere früheren Formeln im wesentlichen aufrecht bleiben.

Wegen $\bar{\mathfrak{x}}'' = 0$ folgt nämlich aus (7)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l' &= (1+\gamma')\,\bar{\mathfrak{x}}' - \varkappa^*\,\bar{\mathfrak{c}} \\ \bar{\mathfrak{x}}_r' &= (1-\gamma')\,\bar{\mathfrak{x}}' + \varkappa^*\,\bar{\mathfrak{c}} \end{aligned}} \tag{4, 18}$$

und daraus folgt wegen (11)

$$\begin{cases} ds_l^2 = \bar{\mathfrak{x}}_l'^2\,ds^2 = \big((1+a)^2 + b^2\big)\,ds^2 \\ ds_r^2 = \bar{\mathfrak{x}}_r'^2\,ds^2 = \big((1-a)^2 + b^2\big)\,ds^2 \end{cases} \tag{4, 19}$$

sowie

$$b = \tfrac{1}{2}\,[\bar{\mathfrak{x}}_l', \bar{\mathfrak{x}}_r']. \tag{4, 20}$$

In der letzten Formel steckt die *Erweiterung des Satzes* **15** *auf geodätische Schmiegstreifen.*

Berechnen wir noch das Bogendifferential dS des *sphärischen Bildes* $\mathfrak{x}(s)$ unserer geodätischen Streifen! Formel (5) lautet, vektoriell geschrieben,

(4, 21) $$\bar{\mathfrak{x}} = z' \bar{\mathfrak{x}}' + \gamma \bar{\mathfrak{c}}.$$

Es folgt

(4, 22) $$\bar{\mathfrak{x}}' = \varkappa^* \bar{\mathfrak{x}}' + \gamma' \bar{\mathfrak{c}} = b \bar{\mathfrak{t}} + a \bar{\mathfrak{c}},$$

also wieder

(4, 23) $$dS^2 = \bar{\mathfrak{x}}'^2 ds^2 = (a^2 + b^2) ds^2.$$

Es gelten daher für den Winkel φ der Kurventangente t gegen die Streifenerzeugenden e wieder die Formeln (3, 46)

(4, 24) $$\cos \varphi = a \cdot \frac{ds}{dS}, \qquad \sin \varphi = b \cdot \frac{ds}{dS},$$

und daher kann man, wie oben, die *Bogenelemente* ds_l, ds_r *der beiden parataktischen Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ so schreiben:

(4, 25) $$\boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= dS^2 + ds^2 + 2\, dS\, ds \cos \varphi, \\ ds_r^2 &= dS^2 + ds^2 - 2\, dS\, ds \cos \varphi. \end{aligned}}$$

Es folgt die Richtigkeit des *Satzes* **14** auch für *geodätische Krümmungsstreifen.*

Insonderheit gelten alle in Nr. **18** über das *Verzerrungsparallelogramm* und die *Verzerrungswinkel* aufgestellten Formeln und Sätze auch im Falle geodätischer Streifen.

33. Geodätische Krümmungsstreifen. Man kann (bis auf isotrope Scherungen eindeutig) mit jeder *Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ einer isotropen Ebene den zugehörigen *Krümmungsstreifen*, d. h. einen der *zylindrischen Normalstreifen* der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ verknüpfen. Seine parataktischen Bildkurven sind isometrisch mit dem Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\mathfrak{x}$ als geradlinigem Mittenort. Es folgt

Satz 27. *Die parataktischen Bildkurven* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ *eines geodätischen Krümmungsstreifens* $\mathfrak{x}(s)$ *entstehen auseinander durch eine Umlegung, deren Achse in den geradlinigen Grundriß* $\bar{\mathfrak{x}}$ *der Streifenkurve* $\mathfrak{x}(s)$ *fällt.*

Die isotrope Geometrie der Kurven $\mathfrak{x}(s)$ *in einer isotropen Ebene spiegelt sich daher wider in der elementaren Geometrie der umlegungskongruenten Kurvenpaare* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ *der Bildebene.*

Z. B. gewinnt man aus (18) wegen $a = \gamma' = 0$ die Formeln

(4, 26) $$\bar{\mathfrak{x}}_l' = \bar{\mathfrak{x}}' - \varkappa^* \bar{\mathfrak{c}} \quad | \quad \bar{\mathfrak{x}}_r' = \bar{\mathfrak{x}}' + \varkappa^* \mathfrak{c}$$

und daraus, da $\bar{\mathfrak{x}}'' = \bar{\mathfrak{c}}' = \mathfrak{o}$ ist,

(4, 27) $$\bar{\mathfrak{x}}_l'' = -\varkappa^{*\prime} \bar{\mathfrak{c}} \quad | \quad \bar{\mathfrak{x}}_r'' = +\varkappa^{*\prime} \bar{\mathfrak{c}},$$

so daß sich für die *Bogenelemente* und *Krümmungen* der parataktischen Bildkurven die Formeln

$$\text{(4, 28)} \qquad \begin{cases} ds_l = ds_r = \sqrt{1 + \varkappa^{*2}}\, ds, \\ \varkappa_r = -\varkappa_l = \dfrac{\varkappa^{*\prime}}{(1+\varkappa^{*2})^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

ergeben. Da

$$\text{(4, 29)} \qquad \varkappa^* = \frac{dz'}{ds}.$$

ist, hat man, wenn man $z' = Z$ setzt, die Formeln

$$\text{(4, 30)} \qquad \begin{cases} ds_l = ds_r = \sqrt{ds^2 + dZ^2}, \\ \varkappa_r = -\varkappa_l = \dfrac{Z''}{(1+Z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

welche folgendes Ergebnis enthalten:

Satz 28. *Es sei in einer isotropen Ebene eine Kurve* $\mathfrak{x}$ *der Gleichung* $z = z(s)$ *gegeben. Die durch sie gelegten isotropen Krümmungsstreifen haben dann zueinander umlegungskongruente parataktische Bilder* $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$, *die kongruent sind zur ersten abgeleiteten Kurve* $Z = z'(s)$ *von* $\mathfrak{x}$.

Legt man z. B. durch einen *parabolischen Kreis* des Parameters p einen der ∞^1 möglichen zylindrischen *Krümmungsstreifen*, so ist

$$\varkappa^* = \frac{1}{p} = \text{const},$$

also $\varkappa_l = \varkappa_r = 0$, d. h. es ergeben sich als parataktische Bilder *zwei kongruente (= isometrische) gerade Linien, deren halber Öffnungswinkel durch die Gleichung* (3, 53)

$$\text{(4, 31)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = b = \varkappa^* = \frac{1}{p}$$

gegeben ist.

Diese Beziehung kann umgekehrt zur geometrischen Deutung der Normalkrümmung b *eines beliebigen Streifens verwendet werden und enthält dann auch eine Formulierung des* Meusnierschen *Satzes.*

Diese beiden kongruenten geraden Punktreihen können nämlich durch *Drehung* zur Deckung gebracht werden. Diese Drehung ist das parataktische Abbild jener *isotropen Kugel*, welche den parabolischen Krümmungsstreifen enthält. Ihr Parameter ist p, und sie selber ist die *Meusniersche Kugel* jenes Streifenelementes.

Bemerken wir noch, daß *dual* zu einem geodätischen Krümmungsstreifen ein ebensolcher Streifen ist.

Allgemein ist *dual* zu einem beliebigen geodätischen Streifen ein *zylindrischer Streifen* auf einem Zylinder nichtvollisotroper Erzeugendenrichtung. Für Streifen dieser Art ist kennzeichnend die Relation

(4, 32) $$ab' - a'b = (a^2 + b^2)\,c.$$

Für *geodätische zylindrische Streifen* ist hierin $c = 0$ zu setzen.

34. Konstruktion der flächentreuen Abbildungen mit geradliniger Mittenkurve. Aus den Ergebnissen der letzten Nummer, insbesondere aus Satz 27, folgt auch eine einfache *Konstruktion der allgemeinsten flächentreuen Abbildung mit geradlinigem Mittenort.*

Die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ der isotropen Ebene ε besitzt einen *horizontalen (zylindrischen) Krümmungsstreifen*. Seine parataktischen Bilder $(\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*)$ sind bezüglich der Spurgeraden e von ε auf der Bildebene π zueinander *symmetrisch* und sind (Satz 28) kongruent zur ersten abgeleiteten Kurve von $\mathfrak{x}(s)$. *Alle weiteren*, ebenfalls zylindrischen *Krümmungsstreifen* gehen aus dem horizontalen durch vollisotrope Scherungen längs der Ebene ε hervor. Sie bilden dabei nach dem *Satz*

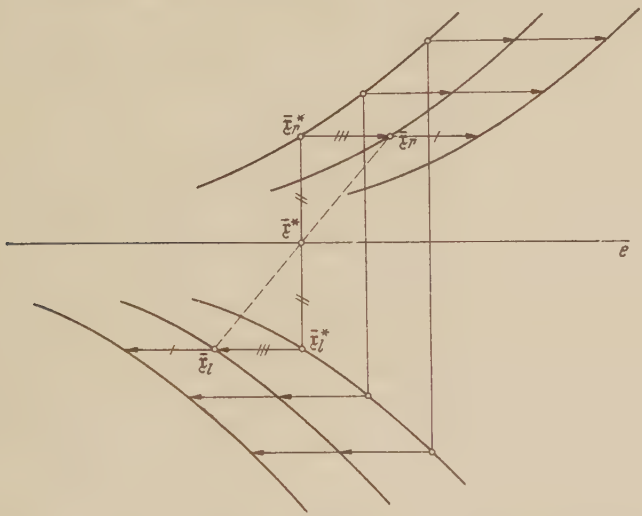

Fig. 6.

von Joachimsthal mit dem horizontalen Krümmungsstreifen jeweils einen *festen Neigungswinkel* γ_0. Für ihre parataktischen Bilder $(\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r)$ gilt daher nach (18)

(4, 33)
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l &= \bar{\mathfrak{x}}_l^* + \gamma_0 \bar{\mathfrak{x}}', \\ \bar{\mathfrak{x}}_r &= \bar{\mathfrak{x}}_r^* - \gamma_0 \bar{\mathfrak{x}}'. \end{aligned}}$$

Darin steckt (Fig. 6) die folgende einfache

Konstruktion: *Es sei $\bar{\mathfrak{x}}_l^*, \bar{\mathfrak{x}}_r^*$ ein bezüglich der Geraden e symmetrisches Kurvenpaar. Verschiebt man dann $\bar{\mathfrak{x}}_l^*$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r^*$ mittels gegengleicher Trans-*

lationen längs e, so erhält man die allgemeinste eigentlich-flächentreue Punktverwandtschaft $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ *der Ebene mit e als gerader Mittenkurve.*

Spiegelt man eines der beiden Bildfelder $\bar{\mathfrak{x}}_l$ oder $\bar{\mathfrak{x}}_r$ an einem Punkte so erhält man *dual* eine *flächentreue Verwandtschaft* (mit flächenhaftem Mittelort), welche parataktisch jenem *Zylinder* entspricht, der zur Kurve $\mathfrak{x}$ (s in einem Links- oder Rechtsgewinde polar ist. Auch deren einfache isotrope Theorie ist durch die vorstehenden Betrachtungen miterledigt.

V. Überblick über die isotrope Flächentheorie.

35. Die isotrope Flächenmetrik. Es bedeute $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ den Ortsvektor eines Flächenpunktes

$$\mathfrak{x}(u,v) \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \bar{\mathfrak{x}}(u,v) \tag{5,1}$$

und $\bar{\mathfrak{x}}(u, v)$ seinen *Grundrißvektor*. Wir setzen voraus, daß das Parameternetz (u, v) im Grundriß *regulär* sei, d. h. daß im betrachteten Bereiche

$$W = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] \neq 0 \tag{5,2}$$

sei. Stellen mit isotroper Tangentialebene sind daher ausgeschlossen, insbesondere auch alle Zylinder mit vollisotroper (= z-paralleler) Erzeugendenrichtung. Die Fläche (1) kann daher jedenfalls im zugelassenen Arbeitsbereiche in der *„kartesischen" Form*

$$z = z(x, y) \tag{5,3}$$

dargestellt werden. Sie soll zumindest zweimal stetig differenzierbar sein. Wir werden sie aber gerne sogar als *analytisch* voraussetzen.

Das *isotrope Bogenelement* ds der Fläche ergibt nach der Formel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (d\bar{\mathfrak{x}})^2 = (\bar{\mathfrak{x}}_u du + \bar{\mathfrak{x}}_v dv)^2 \tag{5,4}$$

die *erste Grundform* der isotropen Flächentheorie:

$$ds^2 = I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{5,5}$$

wenn wir mit

$$\begin{cases} E = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 \\ F = \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = x_u x_v + y_u y_v \\ G = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 \end{cases} \tag{5,6}$$

die isotropen *Fundamentalgrößen I. Art* bezeichnen. Bedeutet

$$W^2 = EG - F^2, \tag{5,7}$$

so kann man in Übereinstimmung mit (2)

$$W = \sqrt{EG - F^2} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] \tag{5,8}$$

setzen.

Die isotrope *Längen- und Winkelmetrik* der Flächen des isotropen Raumes kann nach (4) in elementarer Weise ihrem *Grundriß* entnommen werden.

Die isotrope *Absolutkrümmung* K_a der Fläche, das ist die Gausssche Krümmung ihres Bogenelementes, verschwindet nach (4) identisch

$$K_a = 0. \tag{5,9}$$

36. Isotrope Krümmungstheorie. Die *Normalen* der Fläche (1) sind, zueinander *parallel*, nämlich *vollisotrop*. Die *Normalschnitte* der Flächen liegen daher in isotropen (= z-parallelen) Ebenen. Ihre *Normalkrümmung* ist im Sinne von (3, 26) und (4, 2) durch die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I} \tag{5,10}$$

gegeben, mit

$$\begin{cases} L = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uu}]}{W} \\ M = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}]}{W} \\ N = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{vv}]}{W} \end{cases} \tag{5,11}$$

als Koeffizienten der *zweiten Grundform* der isotropen Flächentheorie.

Für *isotrope Nabelpunkte* ist der Normalkrümmungsradius R in allen Richtungen $du : dv$ derselbe. Sie sind durch

$$L : M : N = E : F : G \tag{5,12}$$

gekennzeichnet.

Für jeden regulären Flächenpunkt, der kein Nabel ist, gibt es genau zwei zueinander *normale* und auf der Fläche *konjugierte Hauptkrümmungsrichtungen*, deren Normalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ Extreme sind. Sie sind mit den Normalkrümmungen der übrigen Richtungen durch die *Eulersche Gleichung*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} \tag{5,13}$$

verknüpft. Von ihren Mittelwerten

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{5,14}$$

bezeichnen wir K als die *isotrope Relativkrümmung* und H als die *isotrope mittlere Krümmung* der Fläche. Sie lautet in parameterinvarianter Weise geschrieben

$$H = \tfrac{1}{2}\,\Delta z\,(u, v), \tag{5, 15}$$

unter $\Delta z\,(u, v)$ den auf $z\,(u, v)$ angewandten zweiten *Beltramischen Differentiator* bezüglich der ersten Grundform (5) verstanden.

Metrisch dual zum Bogenelement ds ist das *Bogenelement* dS *des sphärischen Bildes* $\mathfrak{X}\,(u, v)$, erklärt durch die Koordinaten

$$\mathfrak{X}\,(u, v)\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{\left|\begin{matrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{matrix}\right|}{W} \\ Y = \dfrac{\left|\begin{matrix} z_u x_u \\ z_v x_v \end{matrix}\right|}{W} \end{array}\right\} \overline{\mathfrak{X}}\,(u, v) \tag{5,16}$$

$$Z = -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) = -\tfrac{1}{2}\,\nabla z\,(u, v),$$

unter ∇z den ersten Beltramischen Differentiator bezüglich der I. Grundform (5) verstanden. Als isotrope Einheitskugel ist dabei das Paraboloid

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{5, 17}$$

gewählt. Es ist dabei die *dritte isotrope Grundform*

$$dS^2 = III = (d\,\overline{\mathfrak{X}}\,(uv))^2 \tag{5, 18}$$

mit den beiden ersten Grundformen durch die Gleichung

$$\boxed{K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0} \tag{5,19}$$

verbunden.

Wir stellen neben diese drei noch eine *vierte Grundform* IV, deren Definition aus der Formel für die *geodätische Windung* a der Flächenkurven fließt

$$a = \frac{IV}{I} = \frac{\frac{2}{W}\left|\begin{matrix} dv^2 - du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{matrix}\right|}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{5,20}$$

Die Gleichung

$$IV = 0 \tag{5, 21}$$

kennzeichnet die *isotropen Krümmungslinien*. Ähnlich genügen der Gleichung

$$II = 0 \tag{5, 22}$$

die *Asymptotenlinien* der Fläche, für deren Torsionen τ_1, τ_2 in jedem Flächenpunkte *das Theorem von Beltrami-Enneper* gilt:

$$\tau_1 = +\sqrt{-K}, \quad \tau_2 = -\sqrt{-K}. \tag{5, 23}$$

37. Die vier Grundformen der Fläche $z = z(x, y)$ lauten unter Benutzung der Eulerschen Bezeichnungen

$$(5,24)\qquad \begin{cases} I = dx^2 + dy^2, \\ II = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2, \\ III = dp^2 + dq^2 = (r\,dx + s\,dy)^2 + (s\,dx + t\,dy)^2, \\ IV = 2\,[s\,dx^2 - (r - t)\,dx\,dy - s\,dy^2]. \end{cases}$$

Die relative und mittlere Krümmung haben jetzt folgende Gestalt:

$$(5,25)\qquad \begin{cases} K = \dfrac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2, \\ H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\Delta z(x, y) = \dfrac{r + t}{2}. \end{cases}$$

Die dritte Grundform war als Bogenelement des sphärischen Bildes erklärt. Als sphärisches Bild $\mathfrak{X}$ des Flächenelementes $E(x, y, z, p, q)$ ergibt sich der Punkt

$$(5,26)\qquad \mathfrak{X}\begin{cases} X = -p \\ Y = -q \end{cases}\Big|\,\bar{\mathfrak{X}} \qquad Z = -\tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) = -\tfrac{1}{2}\,\nabla z(x, y),$$

und man hat in der Tat

$$(5,27)\qquad III = dS^2 = (d\bar{\mathfrak{X}})^2.$$

Für *konjugierte Flächenrichtungen* $d\bar{x}$ $(dx : dy)$ und $\delta\bar{x}$ $(\delta x : \delta y)$ verschwindet die Polarform der zweiten Grundform

$$(5,28)\qquad r\,dx\,\delta x + s\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y = 0.$$

Man kann daher setzen

$$(5,29)\qquad \delta\bar{x}\begin{cases} \delta x = \quad (s\,dx + t\,dy) = +\,dq \\ \delta y = -\,(r\,dx + s\,dy) = -\,dp \end{cases}$$

und hat einerseits die Tatsache bewiesen, daß *das sphärische Bild* (dp, dq) *einer Richtung* (dx, dy) *normal ist zur konjugierten Flächenrichtung* $(\delta x, \delta y)$, andererseits, daß

$$(5,30)\qquad dS^2 = III = \delta x^2 + \delta y^2 = \delta s^2.$$

Bezeichnet φ den Winkel zwischen der Flächenrichtung $d\bar{x}$ und ihrer konjugierten Richtung $\delta\bar{x}$, so findet man

$$(5,31)\qquad \sin\varphi = \frac{[\delta\bar{x}\,d\bar{x}]}{\delta s \cdot ds} = \frac{II}{\sqrt{I \cdot III}} \quad\Big|\quad \cos\varphi = \frac{(\delta\bar{x} \cdot d\bar{x})}{\delta s \cdot ds} = \frac{IV}{2\sqrt{I \cdot III}}.$$

Erwähnen wir noch die Formel der *Relativkrümmung K für implizite Darstellung*

$$f(x, y, z) = 0 \tag{5, 32}$$

der Fläche. Man findet

$$K = -\frac{1}{f_z^4}\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}. \tag{5, 33}$$

38. Äquimetrische Flächenkurven nennen wir solche, deren Bogenelement ds und Kontingenzwinkel der Tangentialebenen $d\vartheta = dS$ einander *gleich* sind. Da allgemein

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = \frac{III}{I} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2} \tag{5, 34}$$

ist, unter φ den Winkel von ds gegen die erste isotrope Hauptkrümmungsrichtung verstanden, folgt für *äquimetrische Flächenkurven*, definiert durch

$$I - III = 0, \tag{5, 35}$$

die Gleichung

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2} = 1. \tag{5, 36}$$

Sie kann zur *Konstruktion der äquimetrischen Richtungen* dienen. Man hat, um sie zu erhalten, im Grundriß die *Ellipse* (36) mit dem *Einheitskreis* zu schneiden. Die äquimetrischen Richtungen liegen nach (36) zu den beiden isotropen Hauptkrümmungsrichtungen symmetrisch.

Über die *Realität* der äquimetrischen Richtungen eines Flächenpunktes entscheidet das Vorzeichen der Diskriminante D von (35). Man findet

$$\begin{aligned} D = (1 + K)^2 - 4H^2 &= (1 - K)^2 - 4(H^2 - K) \\ &= \left(1 - \frac{1}{R_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{R_2^2}\right). \end{aligned} \tag{5, 37}$$

Je nachdem $D < 0$, $= 0$ oder > 0 ist, sind auf reellen Flächen die äquimetrischen Richtungen reell verschieden, zusammenfallend oder konjugiert-komplex. Im letzten Falle z. B. sind R_1^2 und R_2^2 beide größer oder beide kleiner als 1, der Einheitskreis liegt im Innern oder Äußern der Ellipse (36), die gemeinsamen Sehnen sind konjugiert-komplex. Entsprechendes gilt in den beiden übrigen Fällen.

Z. B. sind die äquimetrischen Linien auf einer reellen *Fläche der festen Relativkrümmung* $K = +1$ stets *reell*, auf einer reellen isotropen *Minimalfläche* ($H = 0$) stets *komplex*.

Die *Differentialgleichung der äquimetrischen Linien* kann nach (19) auch so geschrieben werden:

$$(1+K)\,I - 2\,H\,II = 0. \tag{5, 38}$$

Sie ist *identisch erfüllt* erstens für die beiden Einheitskugeln

$$z = \pm \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \tag{5, 39}$$

und zweitens für die beiden orthogonalen CLIFFORDschen Flächen des isotropen Raumes der Relativkrümmung $K = -1$

$$z = \pm \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \tag{5, 40}$$

und ihre bewegungskongruenten Flächen, auf denen sämtliche Kurven äquimetrisch sind.

VI. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene mit flächenhaftem Mittenort.

39. Die parataktischen Abbildungen der regulären Flächen des isotropen Raumes. Das Flächenstück Φ vom Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ und Grundrißvektor $\bar{\mathfrak{x}}(u, v)$

$$\mathfrak{x}(u,v)\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}\bar{\mathfrak{x}}(u,v) \tag{6, 1}$$

sollte im isotropen Raume *regulär* heißen, wenn im Arbeitsbereiche der (u, v) die Funktionaldeterminante

$$W = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] \neq 0 \tag{6, 2}$$

ist. Flächenpunkte mit isotroper Tangentialebene kommen dann nicht vor, und die Fläche Φ, die wir wieder als analytisch voraussetzen wollen, kann in die explizite Form

$$z = z(x, y) \tag{6, 3}$$

gesetzt werden.

Als *parataktische Bilder* (E_l, E_r) der Berührungselemente $E(x, y, z, p, q)$ der Fläche Φ erhält man die Punkte

$$E_l\begin{cases} x_l = x + q = x + \dfrac{x_u z_v - x_v z_u}{W}, \\ y_l = y - p = y + \dfrac{y_u z_v - y_v z_u}{W}; \end{cases} \tag{6, 4}$$

$$E_r\begin{cases} x_r = x - q = x - \dfrac{x_u z_v - x_v z_u}{W}, \\ y_r = y + p = y - \dfrac{y_u z_v - y_v z_u}{W}; \end{cases} \tag{6, 5}$$

dafür schreiben wir *vektoriell*

$$(6,6)\qquad \boxed{\bar{\mathfrak{x}}_l = \bar{\mathfrak{x}} + \frac{z_v \bar{\mathfrak{x}}_u - z_u \bar{\mathfrak{x}}_v}{W},} \qquad \boxed{\bar{\mathfrak{x}}_r = \bar{\mathfrak{x}} - \frac{z_v \bar{\mathfrak{x}}_u - z_u \bar{\mathfrak{x}}_v}{W}.}$$

Ihr *Mittenort* ist nach (2) *flächenhaft*. Man berechnet aus (4) und (5)

$$(6,7)\qquad \frac{\partial (x_l, y_l)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (x_r, y_r)}{\partial (x, y)} = 1 + rt - s^2.$$

Nach (5, 25) ist also, unter K die *Relativkrümmung* der Fläche Φ an der betreffenden Stelle verstanden,

$$(6,8)\qquad \boxed{\frac{\partial (x_l, y_l)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (x_r, y_r)}{\partial (x, y)} = 1 + K.}$$

Besteht *umgekehrt* für die beiden parataktischen Bilder einer (nur bis auf vollisotrope Schiebungen festgelegten) Mannigfaltigkeit Φ^* von Flächenelementen der Stellung

$$(6,9)\qquad p = p(x, y), \quad q = q(x, y)$$

Gleichheit der Funktionaldeterminanten

$$(6,10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial (x_l, y_l)}{\partial (x, y)} = 1 + (p_y - q_x) + (p_x q_y - p_y q_x), \\ \dfrac{\partial (x_r, y_r)}{\partial (x, y)} = 1 - (p_y - q_x) + (p_x q_y - p_y q_x), \end{cases}$$

so ist

$$(6,11)\qquad p_y = q_x,$$

d. h. der Ausdruck

$$(6,12)\qquad p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy$$

ist totales Differential einer Funktion

$$(6,13)\qquad z(x, y) + c = \int p\, dx + q\, dy$$

und die Mannigfaltigkeit Φ^* besteht aus den Flächenelementen einer isotropen Translationsschar von *Flächen* Φ: Aus (8) folgt der von G. Scheffers herrührende, uns aus Nr. **14** bekannte

Satz 29. *Die beiden parataktischen Bilder Φ_l und Φ_r einer regulären Fläche Φ des isotropen Raumes sind stets (eigentlich) flächentreu aufeinander bezogen, und umgekehrt kann jede solche flächentreue Verwandtschaft mit flächenhaftem Mittenort als parataktisches Bild einer regulären Fläche Φ (und ihrer durch vollisotrope Translation entstehenden isotropen Parallelflächen) aufgefaßt werden.*

Die in Formel (8) auftretende isotrope Invariante $1 + K$ wollen wir als die *parataktische Krümmung* der Fläche Φ bezeichnen. Sie kann nach (8

ähnlich der Gaussschen Krümmung als Grenzwert des Verhältnisses zweier Flächeninhalte erklärt werden:

Satz 30. *Ist F der isotrope Inhalt eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ von Φ*

(6, 14) $$F = \iint_{\mathfrak{B}} dx\,dy$$

und ist $F_l = F_r$ der gemeinsame Inhalt seiner parataktischen Bildbereiche $\mathfrak{B}_l$ und $\mathfrak{B}_r$

(6, 15) $$F_l = \iint_{\mathfrak{B}_l} dx_l\,dy_l, \quad F_r = \iint_{\mathfrak{B}_r} dx_r\,dy_r,$$

so gilt für die parataktische Krümmung $1 + K$ von Φ im Punkte P

(6, 16) $$1 + K = \lim_{\mathfrak{B} \to P} \frac{F_l}{F} = \lim_{\mathfrak{B} \to P} \frac{F_r}{F}.$$

Für Torsen, insonderheit Kegel, Zylinder und Ebenen ist $K = 0$. Ihre parataktischen Bilder (Φ_l, Φ_r) sind also auf die Flächen Φ selber flächentreu bezogen.

40. Die Flächen der festen Relativkrümmung $K = -1$. In dem oben allgemein formulierten Satze **29** ist der interessante *Grenzfall der Flächen mit der festen Relativkrümmung*

(6, 17) $$K = rt - s^2 = -1$$

enthalten. Für sie verschwinden die Funktionaldeterminanten (8), d. h. die beiden *parataktischen Flächenbilder* Φ_l und Φ_r reduzieren sich auf *bloße Kurven* c_l und c_r. Die Flächeninhalte F_l und F_r der Bildbereiche sind nach wie vor wertegleich, nämlich Null.

Diese ausgezeichneten Flächen des isotropen Raumes haben aus anderen Gründen schon öfter das Interesse der Geometer erweckt und bilden das isotrope Gegenstück zu den Flächen verschwindender Absolutkrümmung des elliptischen Raumes, die L. Bianchi entdeckt hat. Man kann ihre Theorie leicht der parataktischen Abbildung entnehmen.

Jeder Punkt P_l der linken Bildkurve c_l zusammen mit allen Punkten der rechten Bildkurve c_r bestimmt nach Satz **15** einen *Schmiegstreifen σ_l aus einem Linksgewinde.* Verschiebt man P_l längs der Kurve c_l, so erfährt der Schmiegstreifen σ_l nach Satz **4** lediglich eine *Linksschiebung.* Ebenso bestimmen die einzelnen Punkte P_r von c_r zusammen mit der Kurve c_l *Schmiegstreifen σ_r aus Rechtsgewinden,* welche auseinander durch *Rechtsschiebung* hervorgehen. Daraus folgt

Satz 31. *Jede Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ kann durch isotrope Cliffordsche Schiebungen erzeugt werden, indem man von zwei inzidenten Schmiegstreifen σ_l und σ_r, deren einer einem Linksgewinde, deren anderer einem Rechtsgewinde entnommen ist, entweder σ_l durch Links-*

schiebung längs σ_r, oder σ_r durch Rechtsschiebung längs σ_l bewegt. Die einzelnen Lagen der Schmiegstreifen σ_l und σ_r ergeben dabei die beiden Scharen der Asymptotenlinien der Fläche Φ.

Beispiel 1. *CLIFFORDsche Flächen der Relativkrümmung* $K = -1$. Die Kurven c_l und c_r seien *zwei nichtparallele gerade Linien* g_l, g_r, die wir symmetrisch zur x- und y-Achse wählen können $(0 < \alpha < \pi/2)$

$$(6,18) \qquad g_l \begin{cases} x_l = u \cdot \cos\alpha, \\ y_l = -u \cdot \sin\alpha, \end{cases} \qquad g_r \begin{cases} x_r = v \cdot \cos\alpha, \\ y_r = v \cdot \sin\alpha. \end{cases}$$

Man findet zunächst aus (2, 2) für die zugehörige Fläche Φ

$$(6,19) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\cos\alpha}{2}(u+v), & p = \dfrac{\sin\alpha}{2}(u+v), \\ y = \dfrac{\sin\alpha}{2}(v-u), & q = \dfrac{\cos\alpha}{2}(u-v), \\ z = \int p\,dx + q\,dy = \dfrac{\sin 2\alpha}{4}uv. \end{cases}$$

Das ist eine isotrope *CLIFFORDsche Fläche der Relativkrümmung* $K = -1$. Ihre Gleichung ist

$$(6,20) \qquad \boxed{2z = \operatorname{tg}\alpha \cdot x^2 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot y^2.}$$

Sie kann durch CLIFFORDsche Schiebung ihrer erzeugenden Geraden aneinander erhalten werden und gestattet eine *zweigliedrige Gruppe von Grenzbewegungen in sich*. Ihre Krümmungsgrößen sind daher sämtlich konstant. Man findet

$$(6,21) \qquad \begin{cases} R_1 = +\operatorname{cotg}\alpha, & R_2 = -\operatorname{tg}\alpha, \\ K = -1, & H = -\operatorname{cotg} 2\alpha. \end{cases}$$

Ersetzt man die Bildkurven c_l, c_r einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ in einem Paare entsprechender Punkte P_l, P_r durch die Tangenten t_l, t_r an c_l und c_r, so wird die Fläche Φ durch eine *oskulierende CLIFFORDsche Fläche* Γ derselben Relativkrümmung ersetzt. Man kann Γ durch CLIFFORDsche Schiebung der beiden Haupttangenten von Φ aneinander erhalten. *Die isotropen Krümmungsverhältnisse beider Flächen stimmen überein und können durch die Formeln* (21) *beschrieben werden.*

Beispiel 2. *Schraubfläche der Relativkrümmung* $K = -1$. Die parataktischen Bildkurven c_l und c_r der Fläche Φ seien *zwei Kreise*, die wir *konzentrisch* wählen können:

$$(6,22) \qquad c_l \begin{cases} x_l = a\cos u, \\ y_l = a\sin u, \end{cases} \qquad c_r \begin{cases} x_r = b\cos v, \\ y_r = b\sin v. \end{cases}$$

Man findet wie vorhin dazu im Raume die Fläche

$$(6,23) \qquad \Phi \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(a\cos u + b\cos v), & p = -\tfrac{1}{2}(a\sin u - b\sin v), \\ y = \tfrac{1}{2}(a\sin u + b\sin v), & q = \tfrac{1}{2}(a\cos u - b\cos v), \\ z = \int p\,dx + q\,dy = \tfrac{1}{4}[a^2u - b^2v - ab\sin(u-v)]. \end{cases}$$

Die konzentrischen parataktischen Bildkurven c_l, c_r gestatten die *simultanen Drehungen* $\overline{\mathfrak{D}}$ um ihren gemeinsamen Mittelpunkt. Folglich gestattet die Fläche Φ im isotropen Raume eine *eingliedrige Gruppe von Bewegungen* $\mathfrak{D}$ (vom Grundriß $\overline{\mathfrak{D}}$) und ist also eine *Schraubfläche der Relativkrümmung* $K = -1$, und zwar die allgemeinste ihrer Art. Die Schraubfläche kann durch CLIFFORDsche Schiebung zweier isotroper *Schraublinien* der Torsionen $\tau = \pm 1$ aneinander erzeugt werden, deren

inzidente Schmiegstreifen sich parataktisch auf je einen der Kreise (22) im Verein mit je einem Punkte auf dem anderen Kreise abbilden. Diese isotropen Schraublinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sind die *Asymptotenlinien* der Fläche. Ihre *Grundrisse* sind *Kreise* der Radien $a/2$ und $b/2$, deren Mitten auf konzentrischen Kreisen der Radien $b/2$ und $a/2$ liegen. Diese beiden Drehscharen umhüllen zwei konzentrische Kreise k_1 und k_2 der Radien $\left|\frac{a \pm b}{2}\right|$, denen auf der Fläche Φ zwei von der Schraublinie $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ umhüllte *singuläre Asymptotenlinien* entsprechen, die natürlich selber *Schraublinien* sind. Ihre parataktischen Bilder erhält man, wenn man die beiden Kreise (22) durch *parallele* Tangenten aufeinander bezieht.

Sind die beiden Bildkreise (22) *kongruent* ($a = b$), so erhält man im Raume eine *Drehfläche der Relativkrümmung* $K = -1$, deren es nur diese eine Art gibt.

Beispiel 3. *Die Regelflächen von* CAYLEY *und* MOHRMANN. Wählt man eine *Parabel* c_r und einen ihrer *Durchmesser* c_l als parataktische Bilder, so erhält man im Raume eine CAYLEYsche *Regelfläche dritter Ordnung* der festen Relativkrümmung $K = -1$. Z. B. ergibt sich für

$$(6,24) \qquad c_l \begin{cases} x_l = 0, \\ y_l = 2u, \end{cases} \qquad c_r \begin{cases} x_r = 2v, \\ y_r = 2v^2 \end{cases}$$

die *CAYLEYsche Fläche*

$$(6,25) \qquad \begin{cases} x = v, \\ y = u + v^2, \\ z = -uv + \frac{v^3}{3} \end{cases}$$

der Gleichung

$$(6,26) \qquad \boxed{4x^3 = 3(xy + z).}$$

Die *Regelfläche vierter Ordnung von* MOHRMANN[23]) erhält man, wenn die Gerade c_l *nicht* Durchmesser der Parabel c_r ist. Wählt man etwa

$$(6,27) \qquad c_l \begin{cases} x_l = 2u, \\ y_l = 0, \end{cases} \qquad c_r \begin{cases} x_r = 2v, \\ y_r = 2v^2, \end{cases}$$

so ergibt sich die *MOHRMANNsche Fläche*

$$(6,28) \qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = v^2, \\ z = uv^2 - \frac{v^3}{3} \end{cases}$$

der Gleichung

$$(6,29) \qquad \boxed{16y^3 = 9(xy - z)^2.}$$

Es gibt im isotropen Raume eine *projektive Gruppe* G_9, deren parataktische Bilder aus *Paaren simultaner Affinitäten* $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_r)$ *gleichen Moduls bestehen, welche die Parallelismen zwischen den Bildfeldern* π_l und π_r *erhalten*. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, Linksgewinde in Linksgewinde und Rechtsgewinde in Rechtsgewinde überzuführen.

Eine *Parabel* c_r gestattet nun eine Gruppe $\mathfrak{P}_2$ von affinen Transformationen in sich. Dabei bleibt ihr Fernpunkt V stehen. Falls daneben noch ein anderer Fernpunkt $U \neq V$ stehen bleiben soll, so wird aus $\mathfrak{P}_2$ eine Untergruppe $\mathfrak{P}_1$ herausgegriffen.

---

[23]) H. MOHRMANN, Über die Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Math. Ann. **73** (1913), S. 594; K. STRUBECKER, Über nichteuklidische Schraubungen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **38** (1931), S. 78—79.

Eine *Gerade* mit beliebigem Fernpunkt gestattet dann noch eine Gruppe $\mathfrak{P}_1$ affiner Transformationen gleichen Moduls, welche die Ferngerade in der gleichen Weise transformiert wie die affine Gruppe $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_1$ der Parabel.

Es gibt also insgesamt eine Gruppe $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{G}_1$ simultaner Affinitäten gleichen Moduls, welche das parataktische Bildkurvenpaar (c_l, c_r) der CAYLEYschen Fläche festhalten und die Ferngerade in gleicher Weise transformieren, d. h. Parallelismen zwischen den Bildfeldern erhalten. Ihnen entspricht die *Gruppe G_3 der projektiven Automorphien der CAYLEYschen Fläche.*

Ähnlich gestattet die *Fläche von MOHRMANN* eine *projektive Gruppe G_2*, deren parataktisches Abbild die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ der simultanen Affinitäten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{G}_1$ ist.

Es ist leicht zu sehen, wie sich diese beiden Beispiele der Flächen von CAYLEY und MOHRMANN verallgemeinern lassen. Man hat nur an die Stelle der Parabel c_r eine *höhere rationale W-Kurve* der Form

$$(6,30) \qquad c_r \begin{cases} x_r = 2\,v^m, \\ y_r = 2\,v^n \end{cases}$$

treten zu lassen, die Gerade c_l der Lage (24) oder (27) aber beizubehalten.

Man erhält als *Gegenstück der CAYLEYschen Fläche* die Flächen

$$(6,31) \qquad \boxed{x^{m+n} = \left(\frac{m+n}{2\,m}\right)^m (x\,y+z)^m}$$

und als *Gegenstück der MOHRMANNschen Fläche* die Flächen

$$(6,32) \qquad \boxed{y^{m+n} = \left(\frac{m+n}{2\,n}\right)^n (x\,y-z)^n.}$$

In beiden Fällen handelt es sich um *parabolische Netzflächen*[24]), welche, wie man auf gleiche Art erkennt, je eine *zweigliedrige Gruppe projektiver Automorphien* gestatten, deren parataktische Bilder jene simultanen affinen Automorphien der Kurve (30) und der y- bzw. x-Achse sind, welche die Parallelismen der Bildfelder erhalten.

Beispiel 4. *Flächen sechster Ordnung mit kubischen Asymptotenlinien.* Wir gehen aus von *zwei gleichgestellten Parabeln* c_l, c_r der Form

$$(6,33) \qquad c_l \begin{cases} x_l = 2\,a\,u, \\ y_l = 2\,a\,u^2, \end{cases} \qquad c_r \begin{cases} x_r = 2\,b\,v, \\ y_r = 2\,b\,v^2 \end{cases}$$

als parataktischen Bildkurven einer Fläche Φ, und gewinnen wie vorhin für Φ die Darstellung

$$(6,34) \qquad \Phi \begin{cases} x = a\,u + b\,v, & p = -\,a\,u^2 - b\,v^2), \\ y = a\,u^2 + b\,v^2, & q = \quad a\,u - b\,v, \\ z = \frac{1}{3}\,(a^2 u^3 - b^2 v^3) - a\,b\,u\,v\,(u - v). \end{cases}$$

Die *Asymptotenlinien* (u = const, v = const) dieser Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ sind *kubische Raumkurven*, durch deren CLIFFORDsche Schiebung Φ als *isotrope Schiebfläche* erzeugt werden kann.

---

[24]) Man vergleiche über diese Flächen: K. STRUBECKER[23]), S. 83—84. Ferner meine Note: Über Flächen mit zweigliedriger nichteuklidischer Bewegungsgruppe. Monatshefte f. Math. u. Phys. **44** (1936), S. 51—59.

Eliminiert man unter Benutzung der Relation

$$(u - v)^2 = \frac{(a + b)\, y - x}{ab}$$

die Parameter u und v, so findet man die *Fläche Φ sechster Ordnung* der Gleichung

(6, 35) $$[3\,(a + b)^2 z - 3\,(a^2 - b^2)\, xy + 2\,(a - b)\, x^3]^2 = 16\, ab\, [(a + b)\, y - x^2]^3.$$

Die Fläche besitzt für $u = v$ die *kubische Rückkehrkante*

(6, 36) $$\begin{cases} x = (a + b)\, t, \\ y = (a + b)\, t^2, \\ z = \dfrac{a^2 - b^2}{3}\, t^3 \end{cases}$$

als *singuläre Asymptotenlinie*, nämlich als *Hüllkurve ihrer regulären kubischen Asymptotenlinien*, deren parataktisches Bild (c_l, c_r) das parallelbezogene Parabelpaar (33) ist.

Sonderfall: Für $a = b$ fallen die Parabeln (33) zusammen, die Fläche sechster Ordnung vereinfacht sich zu

(6, 37) $$9\, a^2 z^2 = (2\, a y - x^2)^3.$$

Die *Rückkehrkante* (36) fällt mit der *Parabel*

(6, 38) $$\begin{cases} x = 2\, at, \\ y = 2\, at^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

der Bildebene (nämlich mit dem Bildpaar $c_l = c_r$) zusammen.

Die Fläche Φ (34) gestattet eine *zweigliedrige Gruppe affiner Transformationen* in sich, nämlich jene, welche durch die zweigliedrige Gruppe der affinen Automorphien $t' = \alpha\, t + \beta$ des singulären kubischen Schmiegstreifens (36) induziert wird.

Ihr *parataktisches Abbild* besteht aus der zweigliedrigen *Gruppe G_2 simultaner affiner Automorphien der beiden Bildparabeln c_l, c_r*, welche so zu eindeutigen Paaren gekoppelt sind, daß sie auf die Ferngerade in gleicher Weise einwirken. Ihre Moduln sind dabei von selbst gleich. In Formeln lauten diese Automorphien

(6, 39) $$\begin{cases} x_l' = 2\, a\, \alpha + \beta\, x_l, \\ y_l' = 2\, a\, \alpha^2 + 2\, \alpha\, \beta\, x_l + \beta^2 y_l, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_r' = 2\, b\, \alpha + \beta\, x_r, \\ y_r' = 2\, b\, \alpha^2 + 2\, \alpha\, \beta\, x_r + \beta^2 y_r. \end{cases}$$

41. Die isometrischen Bilder der isotropen Krümmungslinien. Nach Nr. 39 sind die parataktischen Bildpunkte $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ der Berührungselemente der Fläche $\mathfrak{x}\,(u, v)$ durch die Formeln

(6, 40) $$\bar{\mathfrak{x}}_l = \bar{\mathfrak{x}} + \frac{z_v \bar{\mathfrak{x}}_u - z_u \bar{\mathfrak{x}}_v}{W}, \qquad \bar{\mathfrak{x}}_r = \bar{\mathfrak{x}} - \frac{z_v \bar{\mathfrak{x}}_u - z_u \bar{\mathfrak{x}}_v}{W}$$

gegeben. Der *Flächenrichtung*

(6, 41) $$d\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$$

des Grundrisses

(6, 42) $$d\,\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}_u du + \bar{\mathfrak{x}}_v dv$$

entsprechen daher die folgenden beiden *Bildrichtungen*

$$(6,43)\qquad \boxed{\begin{aligned} d\bar{\mathfrak{x}}_l &= \bar{\mathfrak{x}}_u\,du + \bar{\mathfrak{x}}_v\,dv + \frac{(M\,du + N\,dv)\,\bar{\mathfrak{x}}_u - (L\,du + M\,dv)\,\bar{\mathfrak{x}}_v}{W},\\ d\bar{\mathfrak{x}}_r &= \bar{\mathfrak{x}}_u\,du + \bar{\mathfrak{x}}_v\,dv - \frac{(M\,du + N\,dv)\,\bar{\mathfrak{x}}_u - (L\,du + M\,dv)\,\bar{\mathfrak{x}}_v}{W}. \end{aligned}}$$

Aus diesen Grundformeln erhält man die *Bogenelemente* ds_l, ds_r *der parataktischen Bilder*. Es ist, wenn wir die Grundformen I, III und IV der isotropen Flächentheorie heranziehen

$$(6,44)\qquad \boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= d\,\bar{\mathfrak{x}}_l^2 = I + III + IV,\\ ds_r^2 &= d\,\bar{\mathfrak{x}}_r^2 = I + III - IV. \end{aligned}}$$

Da $IV = 0$ die isotropen Krümmungslinien kennzeichnet, folgt

Satz 32. *Es sei* $\Phi_l \to \Phi_r$ *die flächentreue Verwandtschaft, welche durch parataktische Abbildung der Fläche* Φ *entsteht. Dann sind die isometrischen Linien dieser Verwandtschaft die Bilder der isotropen Krümmungslinien der Fläche* Φ *und umgekehrt.*

Dieses für das parataktische Übertragungsprinzip zentrale Theorem ist die Zusammenfassung unseres Satzes **14** für nichtgeodätische und geodätische Streifen. Aus Satz **32** folgt sofort, daß auch im isotropen Raume Kugeln und Ebenen die einzigen Flächen sind, deren sämtliche Kurven Krümmungslinien sind. Denn sie allein besitzen bewegungskongruente parataktische Bildfelder.

Aus (44) folgt weiter in Übereinstimmung mit (3, 50) für die *geodätische Windung* a der Flächenkurven

$$(6,45)\qquad a = \frac{ds_l^2 - ds_r^2}{4\,ds^2}.$$

Da $IV = a \cdot I$ ist, folgt noch

$$(6,46)\qquad \begin{cases} ds_l^2 = (1+a)\,I + III,\\ ds_r^2 = (1-a)\,I + III, \end{cases}$$

und da $III = 2\,H\,II - K\,I$ ist, endlich noch

$$(6,47)\qquad \begin{cases} ds_l^2 = (1-K+a)\,I + 2\,H\,II,\\ ds_r^2 = (1-K-a)\,I + 2\,H\,II. \end{cases}$$

42. Das Verzerrungsparallelogramm. Durch die parataktische Abbildung wird die *Flächenrichtung* $d\,\mathfrak{x}$ in *zwei Bildrichtungen* $d\,\bar{\mathfrak{x}}_l$, $d\,\bar{\mathfrak{x}}_r$ aufgespalten, die zusammen ein Vektorparallelogramm aufspannen, das *Verzerrungsparallelogramm* der Flächenrichtung (Fig. 2). Es enthält (Fig. 3) in seinen Seiten die Bogenelemente ds_l, ds_r der parataktischen Bildkurven, in seinen Diagonalen die Bogenelemente $2\,ds$ und $2\,dS$ des Grundrisses und des

sphärischen Bildes, und im Winkel φ seiner Diagonalen den Winkel der Flächenrichtung ds und ihrer konjugierten Richtung δs.

In der Tat folgt aus (44) mit Rücksicht auf (5, 30) und (5, 31) das uns aus (3, 48) und (4, 25) für Streifen bereits bekannte Formelpaar

$$\boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= ds^2 + dS^2 + 2\,ds\,dS\cos\varphi, \\ ds_r^2 &= ds^2 + dS^2 - 2\,ds\,dS\cos\varphi. \end{aligned}} \tag{6, 48}$$

Die Gleichungen (3, 46) und (4, 24)

$$a = \frac{dS}{ds}\cos\varphi, \qquad b = \frac{dS}{ds}\sin\varphi \tag{6, 49}$$

gestatten, auch die *isotrope Normalkrümmung* b und *geodätische Windung* a der Flächenkurve aus dem Verzerrungsparallelogramm zu entnehmen.

Insbesondere kann auf Grund der Formeln (3, 37) und (4, 20), die lauten

$$b = \tfrac{1}{2}\,[\bar{\mathfrak{x}}_l', \bar{\mathfrak{x}}_r'], \tag{6, 50}$$

die isotrope *Normalkrümmung* b der Flächenrichtung auch aus dem Flächeninhalt des Verzerrungsparallelogramms abgelesen werden.

Für unsere weiteren Zwecke ist es vielfach günstig, die Fläche auf *isotrope Krümmungsparameter* zu beziehen. Man hat dann

$$\begin{cases} F = M = 0, \\ W = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = \sqrt{EG}, \\ K = \dfrac{LN}{EG},\ 2H = \dfrac{EN + GL}{EG} \end{cases} \tag{6, 51}$$

und findet für die isotropen *Hauptnormalkrümmungen* der u- bzw. v-Linien die Werte

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}, \tag{6, 52}$$

sowie für die *Bogenelemente* der parataktischen Bilder

$$\begin{cases} ds_l^2 = E\left(1 + \dfrac{1}{R_1^2}\right)du^2 + 2\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)\cdot W\,du\,dv + G\left(1 + \dfrac{1}{R_2^2}\right)dv^2, \\ ds_r^2 = E\left(1 + \dfrac{1}{R_1^2}\right)du^2 - 2\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)\cdot W\,du\,dv + G\left(1 + \dfrac{1}{R_2^2}\right)dv^2. \end{cases} \tag{6, 53}$$

Es folgt daraus z. B., daß für isotrope *Nabelpunkte*, wo $R_1 = R_2 = R$ ist,

$$ds_l^2 = ds_r^2 = (1 + K)\,ds^2 \tag{6, 54}$$

gilt. Darin steckt

Satz 33. *Die durch die parataktische Übertragung von der Fläche Φ entworfene flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ ist an solchen Stellen, die isotropen Nabeln von Φ entsprechen (und nur für sie) im kleinen kongruent und in Beziehung zur Fläche selbst im kleinen ähnlich.*

Daraus folgt wieder, daß die isotropen *Kugeln* und *Ebenen* die einzigen Flächen sind, deren Punkte sämtlich Nabel sind.

Die vier *Grundformen* haben für Krümmungsparameter die Werte

$$(6,55)\qquad \begin{cases} I = E\,du^2 + G\,dv^2, & III = \dfrac{L^2}{E}du^2 + \dfrac{N^2}{G}dv^2, \\ II = L\,du^2 + N\,dv^2, & IV = \dfrac{2}{\sqrt{EG}}(EN - LG)\cdot du\,dv. \end{cases}$$

43. Die Hauptformeln. Wir ziehen nun auch die *Verzerrungswinkel* heran, welche die Tangentenrichtung $d\,\bar{\mathfrak{x}}$ und die Bildrichtungen $d\,\bar{\mathfrak{x}}_l$, $d\,\bar{\mathfrak{x}}_r$ miteinander einschließen. Man findet aus den Grundformeln (43) für den *linken und rechten Verzerrungswinkel* $\nu_l = \measuredangle\,(d\,\bar{\mathfrak{x}}, d\,\bar{\mathfrak{x}}_l)$, $\nu_r = \measuredangle\,(d\,\bar{\mathfrak{x}}, d\,\bar{\mathfrak{x}}_r)$ und für den *(gesamten) Verzerrungswinkel* $\nu = \measuredangle\,(d\,\bar{\mathfrak{x}}_l, d\,\bar{\mathfrak{x}}_r) = \nu_r - \nu_l$ der Flächenrichtung $d\,\mathfrak{x}$, wenn $dO = W\,du\,dv$ das isotrope Flächenelement bedeutet,

$$(6,56)\qquad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\nu_l &= -\frac{II}{I - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)dO}, \\ \operatorname{tg}\nu_r &= \frac{II}{I + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)dO}; \end{aligned}}$$

$$(6,57)\qquad \boxed{\operatorname{tg}\nu = \frac{2\,II}{I - III} = \frac{2\,II}{(1+K)\,I - 2\,H\,II}}$$

Formeln, die wir in anderer Gestalt in (3, 38) bereits kennengelernt haben.

Aus (56) gewinnt man durch Elimination von dO die Beziehung

$$(6,58)\qquad b = \frac{1}{R} = \frac{II}{I} = \frac{2\operatorname{tg}\nu_l \cdot \operatorname{tg}\nu_r}{\operatorname{tg}\nu_l - \operatorname{tg}\nu_r}$$

für die *Normalkrümmung* b der Kurve, eine Formel, die wir in (3, 39) ebenfalls für Streifen bereits kennengelernt haben. Zusammen mit der Formel für die *geodätische Windung* a

$$(6,59)\qquad a = \frac{\operatorname{tg}\nu_r + \operatorname{tg}\nu_l}{\operatorname{tg}\nu_r - \operatorname{tg}\nu_l}$$

beherrscht man so mittels des *Verzerrungsparallelogramms* auch jetzt wieder die isotropen *Krümmungseigenschaften* der Flächenrichtung $d\,\mathfrak{x}$.

Aus den Formeln (56) und aus der *Hauptformel* (57) fließt der folgende Satz, der eine neue wichtige Beziehung zwischen den flächentreuen Verwandtschaften der Ebene und der isotropen Flächentheorie stiftet:

Satz 34. *Ist die flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ der Ebene parataktisches Bild der Fläche Φ, so entsprechen den Asymptotenlinien von Φ ($II = 0$), und nur ihnen, die parallelbezogenen Kurvenpaare ($\nu = 0$) der Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$.*

In ähnlicher Weise folgt aus (57)

Satz 35. *Den äquimetrischen Linien ($I = III$) der Fläche Φ entsprechen die orthogonalbezogenen Kurvenpaare $\left(v = \frac{\pi}{2}\right)$ der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ und umgekehrt.*

44. Die Hauptverzerrungswinkel. Wir wenden uns nun den *Hauptverzerrungswinkeln* ν_1, ν_2 zu, welche zu den beiden *isotropen Hauptkrümmungsrichtungen* ($dv = 0$, $du = 0$) gehören.

Man findet aus (57) für die erste dieser Richtungen, die Tangente der u-Linie ($dv = 0$), unter Beachtung von (55)

(6, 60) $$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{2EL}{E^2 - L^2},$$

und für die zweite Hauptkrümmungsrichtung ($du = 0$)

(6, 61) $$\operatorname{tg} \nu_2 = \frac{2GN}{G^2 - N^2}.$$

Daraus folgt für die *halben Verzerrungswinkel der isotropen Krümmungsrichtungen*

(6, 62) $$\operatorname{tg} \frac{\nu_1}{2} = \frac{L}{E}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\nu_2}{2} = \frac{N}{G}.$$

Nach (52) bedeutet das

(6, 63) $$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\nu_1}{2} = \frac{1}{R_1},} \qquad \boxed{\operatorname{tg} \frac{\nu_2}{2} = \frac{1}{R_2},}$$

ein Resultat, das man auch aus (58) folgern kann, wenn man bedenkt, daß für die Krümmungsrichtungen das Verzerrungsparallelogramm ein *Rhombus* wird, d. h. $\nu_r = -\nu_l = \frac{\nu}{2}$ ist. Die Formel (63) faßt unsere durch (3, 53) beschriebenen Ergebnisse für Krümmungsstreifen einheitlich zusammen.

Es ist danach

(6, 64) $$\boxed{\begin{aligned} K &= \operatorname{tg} \frac{\nu_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\nu_2}{2}, \\ 2H &= \operatorname{tg} \frac{\nu_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\nu_2}{2}. \end{aligned}}$$

Wir folgern insgesamt

Satz 36. *Durch die Kenntnisse der beiden Hauptverzerrungswinkel ν_1 und ν_2, welche im parataktischen Bilde von den beiden Paaren isometrischer Richtungen einer flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ gebildet werden, beherrscht man die weiteren Winkelverzerrungen dieser Verwandtschaft in ähn-*

licher Weise, wie man durch die Kenntnis der beiden Hauptnormalkrümmungen einer Fläche Φ alle übrigen Normalkrümmungen beherrscht.

45. Rückblick auf die Flächen Φ der Relativkrümmung $K = -1$. Sind (Nr. **40**) c_l und c_r die parataktischen *Bildkurven* einer Fläche Φ mit $K = -1$ und ist $(\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r)$ das Bildpaar eines Punktes $\mathfrak{x}$ von Φ, so ist nach (57) der Verzerrungswinkel ν für alle Flächenrichtungen von $\mathfrak{x}$ derselbe, nämlich

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{1}{H}. \tag{6,65}$$

In der Tat haben alle Flächenrichtungen durch $\mathfrak{x}$ dieselben Bildrichtungen, nämlich die Tangenten $\bar{\mathfrak{x}}_l'$, $\bar{\mathfrak{x}}_r'$ von c_l und c_r in den Punkten $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$. Deren Winkel $\nu = \measuredangle(\bar{\mathfrak{x}}_l', \bar{\mathfrak{x}}_r')$ ist der *gemeinsame Verzerrungswinkel*, der uns übrigens ebenso wie Formel (65), als Winkel 2α bereits in (6, 21) begegnet ist.

46. Die berührenden Affinitäten einer flächentreuen Abbildung. Jede reguläre analytische Punkttransformation ist bekanntlich *im kleinen affin*. Man kann daher jede *flächentreue Verwandtschaft* $\Phi_l \to \Phi_r$ im kleinen als *flächentreue Affinität* $A_l \to A_r$ *auffassen* und sie in jedem Stellenpaare durch eine *berührende Affinität* ersetzen.

Es gibt insgesamt *sechs* verschiedene *Typen* flächentreuer Affinitäten $A_l \to A_r$[25]), die als parataktische Bilder einfachster Elementvereine auftreten. Diese werden gebildet von den Flächenelementen

(1) von *Paraboloiden* mit vollisotroper Durchmesserrichtung,

(2) von ebensolchen *parabolischen Zylindern*,

(3) von ebensolchen *parabolischen Kreisen*,

(4) von *nichtisotropen Geraden*,

(5) von *eigentlichen Punkten*,

(6) von *nichtisotropen Ebenen*.

Diese sogenannten *linearen Elementvereine* A *oskulieren im isotropen Raume den* Lieschen *Elementverein* Φ, dessen parataktisches Bild die Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ war. In dieser Eigenschaft sind sie in den Fällen (1), (2) und (6) aus den Grundlagen der Flächentheorie wohlbekannt.

Die Fälle (3), (4) und (5) entsprechen den kurvenhaften und punktförmigen Lieschen Vereinen, die uns jedoch im Augenblick nicht interessieren. Wir schließen auch den Fall der *Flächen der Relativkrümmung* $K = -1$ aus, deren berührende lineare Elementvereine *Cliffordsche Flächen* derselben Krümmung sind, welche *singuläre Affinitäten*, nämlich solche zwischen *schneidenden Geraden* als parataktische Bilder haben.

---

[25]) K. Strubecker[19]), Abschnitt IV.

Es sei

(6, 66) $$z = z(x, y)$$

die Gleichung einer regulären Fläche Φ vom Ortsvektor $\mathfrak{x}$ mit

(6, 67) $$K = rt - s^2 \neq -1$$

und es sei

(6, 68) $$\bar{\mathfrak{x}}_l \begin{cases} x_l = x + q, \\ y_l = y - p, \end{cases} \qquad \bar{\mathfrak{x}}_r \begin{cases} x_r = x - q, \\ y_r = y + p \end{cases}$$

die flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ ihrer parataktischen Bilder. Deren *berührende Affinität* $A_l \to A_r$ erhalten wir, wenn wir angeben, wie sich die *Differentiale der Koordinaten* transformieren. Man findet die Formeln

(6, 69) $$\boxed{d\bar{\mathfrak{x}}_l \begin{cases} dx_l = (1+s)\,dx + t\,dy, \\ dy_l = -r\cdot dx + (1-s)\,dy, \end{cases} \qquad d\bar{\mathfrak{x}}_r \begin{cases} dx_r = (1-s)\,dx - t\,dy, \\ dy_r = r\,dx + (1+s)\,dy. \end{cases}}$$

47. Die Indikatrizen der flächentreuen Verwandtschaft. Um weiteren Einblick in die infinitesimalen Beziehungen zwischen den parataktischen Bildern (Φ_l, Φ_r) und der Fläche Φ zu gewinnen, werden wir uns eines *Indikatrizenpaares* bedienen.

Sind $\bar{\mathfrak{x}}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_r$ zwei korrespondierende Punkte der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$, so gibt es um $\bar{\mathfrak{x}}_l$ stets eine und im allgemeinen (abgesehen von Streckungen) nur *eine Ellipse* i_l, *der in* $\bar{\mathfrak{x}}_r$ *vermöge der berührenden (flächentreuen) Affinität* $A_l \to A_r$ *eine zu ihr kongruente Ellipse* i_r entspricht. Diese beiden kongruenten Ellipsen sollen als die *Indikatrizen* der flächentreuen Verwandtschaft bezeichnet werden.

Man kommt zu diesen Indikatrizen am schnellsten, wenn man von jenen Punkten $\bar{\mathfrak{x}} + d\bar{\mathfrak{x}}$ des Grundrisses $\bar{\Phi}$ der Fläche Φ ausgeht, welche durch die Gleichung

(6, 70) $$i \ldots \boxed{I + III = 1}$$

oder

(6, 71) $$i \ldots \boxed{(1-K)\,I + 2H\,II = 1}$$

definiert sind. Wenn wir diese Ellipse hier als die (*parataktische*) *Indikatrix i des Flächenpunktes* bezeichnen, so wollen wir ausdrücklich betonen, daß darunter *nicht* etwa die *Dupinsche Indikatrix j* zu verstehen ist, deren Gleichung vielmehr

(6, 72) $$j \ldots II = \pm 1$$

ist.

Es ist bequem und bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, *die x- und y-Richtung* des Koordinatensystems fiele in den untersuchten Flächenpunkte $\mathfrak{x}$ mit den beiden isotropen *Hauptkrümmungsrichtungen* zusammen. Dann ist oben

$$(6,73) \qquad r = \frac{1}{R_1}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{R_2}$$

und die *vier Grundformen* der isotropen Flächentheorie lauten

$$(6,74) \qquad \begin{cases} I = dx^2 + dy^2, \\ II = \frac{dx^2}{R_1} + \frac{dy^2}{R_2}, \\ III = \frac{dx^2}{R_1^2} + \frac{dy^2}{R_2^2}, \\ IV = 2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) dx\,dy = -4\sqrt{H^2 - K}\,dx\,dy, \end{cases}$$

so daß die Gleichung (70) der *parataktischen Indikatrix i* (70) *des Flächenpunktes* $\mathfrak{x}$ die Form annimmt

$$(6,75) \qquad i \ldots \boxed{\left(1 + \frac{1}{R_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{1}{R_2^2}\right) dy^2 = 1.}$$

Satz 37. *Die (parataktische) Indikatrix i eines regulären Flächenpunktes* $\mathfrak{x}$ *ist im reellen stets eine Ellipse, deren Hauptachsen in den isotropen Hauptkrümmungsrichtungen liegen und deren Längen a, b durch die Formeln*

$$(6,76) \qquad a^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_1^2}}, \qquad b^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_2^2}}$$

gegeben sind.

*Für isotrope Minimalflächen und Kugeln, und im reellen nur für sie, wird die parataktische Indikatrix ein Kreis**).

---

*) Im *Komplexen* ist diese Indikatrix auch noch für die isotropen Gegenstücke der *Serretschen Flächen* ein isotroper Kreis. Für diese Flächen ist nämlich $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 0$ oder

$$\boxed{H^2 - K = 0}$$

und sie fallen mit jenen von der Kugel verschiedenen *(komplexen) Regelflächen* zusammen, *deren isotrope Erzeugenden die eine oder andere der beiden absoluten Geraden* (1, 11) *schneiden.*

Um dafür den Beweis zu führen, denken wir die Fläche in der Gestalt $z = z(x, y)$ gegeben, mit

$$H^2 - K = (r - t)^2 + 4s^2 = 0$$

oder

$$2s = \pm i(r - t).$$

Durch die Formeln (69) erhält man aus der Indikatrix i (75) ein aufeinander und auf i *affin bezogenes, zunächst jedenfalls inhaltsgleiches Ellipsenpaar, die Indikatrizen* i_l *und* i_r *der flächentreuen Verwandtschaft* $\Phi_l \to \Phi_r$.

Um es analytisch einfach beschreiben zu können, und auch die *Kongruenz* der Indikatrizen zu ersehen, führen wir günstig die Formen

$$(6,77)\qquad \begin{cases} I_l = dx_l^2 + dy_l^2, \\ II_l = \dfrac{dx_l^2}{R_1} + \dfrac{dy_l^2}{R_2}, \\ III_l = \dfrac{dx_l^2}{R_1^2} + \dfrac{dy_l^2}{R_2^2}, \\ IV_l = 2\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) dx_l\, dy_l \end{cases}$$

und die entsprechend in dx_r, dy_r ausgedrückten Formen I_r, II_r, III_r, IV_r ein, zwischen denen wieder *Identitäten* der Art

$$(6,78)\qquad K\,I_l - 2H\,II_l + III_l = 0$$

bestehen. Drückt man an Hand der Formeln (69) und (73) diese *Grundformen* durch I, II, III und IV aus, so ergibt sich folgender *Zusammenhang*

$$(6,79)\qquad \begin{cases} I_l = I + III + IV, & I_r = I + III - IV, \\ II_l = (1+K)\,II, & II_r = (1+K)\,II, \\ III_l = K^2 I + III - K\,IV, & III_r = K^2 I + III + K\,IV, \\ IV_l = -2(KI - III) + (1-K)IV, & IV_r = +2(KI - III) + (1-K)\,IV, \end{cases}$$

Die Differentialgleichung der *Asymptotenlinien* der Fläche lautet dann, wenn wir das obere Vorzeichen benutzen,

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + dy^2 = (r\,dx - it\,dy)\cdot(dx + i\,dy) = 0.$$

Die eine Schar dieser Linien hat daher *geradlinige Grundrisse*

$$x + iy = \text{const}$$

und besteht somit *im Raume* in der Tat aus *isotropen Geraden*, welche die absolute Gerade

$$t = 0 \quad x + iy = 0$$

schneiden.

Die Differentialgleichung der *isotropen Krümmungslinien* lautet für diese isotropen *Serretschen Flächen*

$$s\,dx^2 - (r - t)\,dx\,dy - s\,dy^2 = s\cdot(dx + i\,dy)^2 = 0.$$

Schließt man den Fall der *isotropen Kugeln* aus ($s \neq 0$), so folgt, daß die *Krümmungslinien* der Serretschen Flächen auch im isotropen Raume mit ihren *Erzeugenden* zusammenfallen, d. h. daß sie nur aus einer einzigen Schar bestehen.

und umgekehrt

$$(6,80)\quad \begin{cases} I = \dfrac{I_l + III_l - IV_l}{(1+K)^2} & = \dfrac{I_r + III_r + IV_r}{(1+K)^2}, \\ II = \dfrac{II_l}{1+K} & = \dfrac{II_r}{1+K}, \\ III = \dfrac{K^2 I_l + III_l + K\,IV_l}{(1+K)^2} & = \dfrac{K^2 I_r + III_r - K\,IV_r}{(1+K)^2}, \\ IV = \dfrac{2K I_l - 2\,III_l + (1-K)\,IV_l}{(1+K)^2} & = \dfrac{-2K I_r + 2\,III_r + (1-K)\,IV_r}{(1+K)^2}. \end{cases}$$

Trägt man die Werte von I und III aus diesen Formeln in die Gleichung (70) oder (71) der parataktischen Indikatrix i ein, so erhält man die *Gleichungen des Indikatrizenpaares* i_l, i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ in der Form

$$(6,81)\quad \begin{cases} i_l \ldots & \boxed{(1+K^2)\,I_l + 2\,III_l - (1-K)\,IV_l = (1+K)^2,} \\ i_r \ldots & \boxed{(1+K^2)\,I_r + 2\,III_r + (1-K)\,IV_r = (1+K)^2,} \end{cases}$$

oder der oft günstigeren Form

$$(6,82)\quad \begin{cases} i_l \ldots & \boxed{(1-K)^2\,I_l + 4H\,II_l - (1-K)\,IV_l = (1+K)^2,} \\ i_r \ldots & \boxed{(1-K)^2\,I_r + 4H\,II_r + (1-K)\,IV_r = (1+K)^2.} \end{cases}$$

Ausführlich geschrieben lauten diese Indikatrizen, wenn die beiden isotropen *Hauptkrümmungsrichtungen* als x- und y-Richtung gewählt sind,

$$(6,83)\quad \begin{cases} i_l \ldots & \boxed{\begin{aligned}(1-K)^2\,(dx_l^2 + dy_l^2) + 4H\left(\frac{dx_l^2}{R_1} + \frac{dy_l^2}{R_2}\right) - \\ - 2\,(1-K)\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}\,dx_l\,dy_l = (1+K)^2,\end{aligned}} \\ i_r \ldots & \boxed{\begin{aligned}(1-K)^2\,(dx_r^2 + dy_r^2) + 4H\left(\frac{dx_r^2}{R_1} + \frac{dy_r^2}{R_1}\right) + \\ + 2\,(1-K)\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}\,dx_r\,dy_r = (1+K)^2.\end{aligned}} \end{cases}$$

48. Grundeigenschaften der Indikatrizen i_l, i_r. Wir orientieren uns nun über die gegenseitige *Lage* und die *Verzerrungsverhältnisse* der Indikatrizen i_l

und i_r zueinander und gewinnen dadurch den einfachsten Einblick in die *infinitesimale Struktur der flächentreuen Abbildung* $\Phi_l \to \Phi_r$. Wir stellen der Reihe nach fest:

Satz 38. *Die flächengleichen Indikatrizen i_l und i_r sind kongruente Ellipsen, die gegen die Achsen der parataktischen Ellipse i, d. h. gegen die beiden isotropen Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche Φ um gegengleiche Winkel $\pm\gamma$ verschwenkt sind.*

Dies liest man unmittelbar aus den Gleichungen (83) ab, und errechnet für den *Gesamtwinkel* 2γ, um welchen die Ellipse i_r gegen i_l *verschwenkt ist*, die Formel

$$\text{(6, 84)} \qquad \boxed{\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{1-K}{2H}.}$$

Ebenso leicht bestätigt man (Fig. 7) den

Satz 39. *Die Indikatrizen i_l und i_r sind derart affin aufeinander bezogen, daß den Endpunkten der kleinen Hauptachse der einen Ellipse die Endpunkte der großen Hauptachse der anderen Ellipse entsprechen und umgekehrt. Diese Hauptachsenpaare von i_l und i_r liegen auf dem entsprechenden Rechtwinkelpaar der Affinität $i_l \to i_r$ und in der parataktischen Indikatrix i ist ihnen das gleichlange Paar konjugierter Durchmesser zugeordnet.*

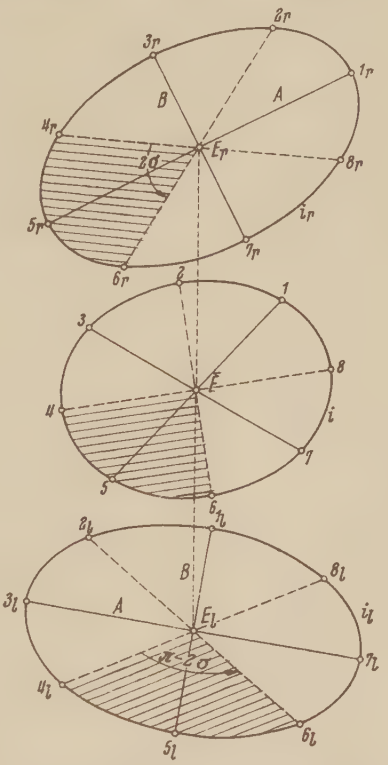

Fig. 7. Die *parataktische Indikatrix* i und das *kongruente Indikatrizenpaar* (i_l, i_r) einer flächentreuen Verwandtschaft $E_l \to E_r$.

Da das Achsenpaar von i die gleichlangen konjugierten Durchmesser *harmonisch* trennt, ist sein affines Bildpaar in i_l und i_r harmonisch zum Paare der Achsen, fällt also, da es aus konjugierten Durchmessern besteht, mit dem *Paare der gleichlangen konjugierten Durchmesser* von i_l und i_r zusammen, die sich also in der Affinität $i_l \to i_r$ entsprechen.

Die Hauptachsen von i haben die Richtung der *isotropen Hauptkrümmungen* der Fläche Φ. Ihre parataktischen Bildrichtungen sind daher nach Satz **32** *isometrisch* und stimmen mit den *gleichlangen konjugierten Durchmessern der Indikatrizen i_l und i_r* überein.

Zusammenfassend folgt

Satz 40. *Umgekehrt entsprechen den Hauptachsen der parataktischen Indikatrix i der Fläche Φ die Paare der gleichlangen konjugierten Durchmesser der beiden Indikatrizen i_l und i_r.*

Aus Satz **34** folgt

Satz 41. *In der affinen Zuordnung der Indikatrizen i, i_l, i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ gibt es zwei invariante Richtungen (die reell verschieden konjugiert komplex oder zusammenfallend sein können), je nachdem $K < 0$, > 0 oder $= 0$ ist), nämlich das Bildpaar der Asymptotenrichtungen der Fläche Φ.*

Für die *Längen A, B der Hauptachsen der kongruenten Indikatrizen i_l und i_r* findet man aus ihren Gleichungen (83) mit bekannten Methoden

$$(6,85) \qquad \begin{cases} A^2 = 1 + 2\sqrt{\dfrac{H^2 - K}{(1-K)^2 + 4H^2}}, \\ B^2 = 1 - 2\sqrt{\dfrac{H^2 - K}{(1-K)^2 + 4H^2}}, \end{cases}$$

woraus man für den *Winkel 2σ der beiden längengleichen konjugierten Durchmesser der Indikatrizen i_l, i_r* den Ausdruck

$$(6,86) \qquad \boxed{\sin 2\sigma = \frac{1+K}{\sqrt{4H^2 + (1-K)^2}}}$$

erhält.

Aus den Formeln (84) und (85) oder (86) folgt

Satz 42. *Durch die Gestalt und die gegenseitige Lage der kongruenten Indikatrizen i_l und i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ sind die lokalen isotropen Krümmungsverhältnisse der parataktischen Bildfläche Φ im Raume eindeutig festgelegt.*

Z. B. schließt man aus den Formeln (85) den

Satz 43. *Die beiden kongruenten Indikatrizen i_l und i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ sind dann und nur dann reelle Kreise ($A = B$), wenn*

$$(6,87) \qquad H^2 - K = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 = 0$$

ist, d. h. wenn der zugehörige Punkt der Fläche Φ ein isotroper Nabelpunkt ist.

Ferner folgt wegen

$$(6,88) \qquad \frac{H^2 - K}{(1-K)^2 + 4H^2} = \frac{H^2 - K}{(1+K)^2 + 4(H^2 - K)}$$

für $K = -1$

$$(6,89) \qquad A^2 = 2, \quad B^2 = 0.$$

Satz 44. *Die Indikatrizen i_l und i_r sind für Flächen Φ der Relativkrümmung $K = -1$ gleichlange Strecken, die symmetrisch zum Berührungspunkte auf den Tangenten der parataktischen Bildkurven c_l und c_r der Fläche Φ liegen.*

Wir wenden uns nun zwei bemerkenswerten Flächengattungen und ihren parataktischen Bildern zu, nämlich zuerst den *isotropen Minimalflächen*, und dann *den Flächen fester Relativkrümmung* K ($\neq 0, -1$), insbesondere *den Flächen* $K = +1$.

VII. Die parataktische Abbildung der isotropen Minimalflächen.

49. Übersicht über die Theorie der Minimalflächen des isotropen Raumes. Will man die isotropen Minimalflächen, definiert zunächst durch Verschwinden der isotropen mittleren Krümmung

$$H = \tfrac{1}{2}\,\Delta z\,(u, v), \tag{7, 1}$$

als *Extremalen* eines Variationsproblems erklären, so muß man zu einer gegen isotrope Bewegungen nicht invarianten *Relativoberfläche* O^* greifen, die etwa durch das *Dirichletsche Integral*

$$O^* = \tfrac{1}{2}\iint \nabla z\,(u, v)\cdot \mathrm{W}\,du\,dv \tag{7, 2}$$

erklärt werden kann, unter ∇ und Δ die beiden *Beltramischen Differentiatoren*, gebildet hinsichtlich des isotropen Bogenelementes (5, 5), verstanden.

Bei Verwendung der kartesischen Parameter x, y handelt es sich um die Integralflächen der *Laplaceschen Gleichung*

$$\Delta z\,(x\,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{7, 3}$$

also *im reellen Falle*, der uns hier allein interessieren soll, um jene sogenannten *Potentialflächen*, deren z-Koordinate man als Realteil (oder Imaginärteil) komplexer analytischer Funktionen

$$f(\mathfrak{z}) = f(x + iy) = U(x, y) + i\,V(x, y) \tag{7, 4}$$

der komplexen Variablen $\mathfrak{z} = x + iy$ darstellen kann:

$$z = \Re f(x + iy) = U(x, y). \tag{7, 5}$$

Man kann diese isotropen Minimalflächen Φ als *Schiebflächen* konjugiert-komplexer *isotroper Minimalkurven* (aus vollisotropen Ebenen

$$x \pm iy = \text{const}) \tag{7, 6}$$

erzeugen, wie folgende Darstellung zeigt:

$$(7,7)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x+iy}{2} + \dfrac{x-iy}{2}, \\ y = \dfrac{x+iy}{2i} - \dfrac{x-iy}{2i}, \\ z = \dfrac{f(x+iy)}{2} + \dfrac{\bar{f}(x-iy)}{2}. \end{cases}$$

Als Wert der isotropen *Relativkrümmung* K der Minimalfläche Φ erhält ma

$$(7,8)\qquad K = -f''(\mathfrak{z})\cdot\bar{f}''(\bar{\mathfrak{z}}) = -|f''(\mathfrak{z})|^2,$$

wobei die Striche Ableitungen der analytischen Funktion $f(\mathfrak{z})$ nach der kom plexen Variablen $\mathfrak{z} = x + iy$ bedeuten.

Durch die Formeln

$$(7,9)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}(x,y) &= \Re\int\sqrt{f''(\mathfrak{z})}\,d\mathfrak{z} = \text{const}, \\ \mathfrak{V}(x,y) &= \Im\int\sqrt{f''(\mathfrak{z})}\,d\mathfrak{z} = \text{const} \end{aligned}}$$

sind die Grundrisse der *isotropen Krümmungslinien* der Minimalfläche Φ gegeben. Sie bilden ein *isothermes Netz*, dessen gleichfalls *isothermes Diagonalnetz*

$$(7,10)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}(x,y) + \mathfrak{V}(x,y) &= \text{const}, \\ \mathfrak{U}(x,y) - \mathfrak{V}(x,y) &= \text{const} \end{aligned}}$$

die Grundrisse der *Asymptotenlinien* von Φ liefert.

Mit jeder isotropen Minimalfläche $\Phi = \Phi^0$ ist auch im isotropen Raume die Schar ihrer *assoziierten Minimalflächen* Φ^α verbunden, definiert durch

$$(7,11)\qquad \begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}\left[f(x+iy)\cdot e^{-i\alpha} + \bar{f}(x-iy)\cdot e^{i\alpha}\right] \\ &= U(x,y)\cdot\cos\alpha + V(x,y)\cdot\sin\alpha. \end{aligned}$$

Sie sind im isotropen Raume unter Erhaltung der Relativkrümmung K und der Relativoberfläche O^* (2) *aufeinander abwickelbar*, wobei sich Punkte des gleichen Grundrisses entsprechen.

Zu Argumenten α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$ gehören *konjugierte Minimalflächen* Φ^α und $\Phi^{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Sie stimmen mit *konjugierten Potentialflächen* überein, z. B. ist zur Fläche (5) *konjugiert* die Fläche

$$(7,12)\qquad z = \Im f(x+iy) = V(x,y).$$

Die *isotropen Krümmungslinien* der assoziierten Minimalflächen Φ^α gestatten die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathfrak{V}\sin\tfrac{\alpha}{2} &= \text{const}, \\ -\mathfrak{U}\sin\tfrac{\alpha}{2} + \mathfrak{V}\cos\tfrac{\alpha}{2} &= \text{const}, \end{aligned} \tag{7, 13}$$

während ihre *Asymptotenlinien* lauten

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\alpha}{2}\right) + \mathfrak{V}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \text{const}, \\ -\mathfrak{U}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\alpha}{2}\right) + \mathfrak{V}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \text{const}. \end{aligned} \tag{7, 14}$$

Darin steckt

Satz 45. *Die isotropen Krümmungslinien assoziierter Minimalflächen, deren Parameter sich um α unterscheiden, sind voneinander isogonale $\frac{\alpha}{2}$-Trajektorien. Entsprechendes gilt für die Asymptotenlinien. Beim Übergang zu konjugierten Minimalflächen durch isotrope Verbiegung entstehen dabei aus den isotropen Krümmungslinien der einen die Asymptotenlinien der anderen Fläche und umgekehrt.*

50. Das parataktische Abbild der isotropen Minimalflächen. Die *parataktische Indikatrix* i eines Punktes auf einer Minimalfläche hat nach (6, 71) wegen $H = 0$ die Gleichung

$$i \ldots (1 - K) \cdot I = 1 \tag{7, 15}$$

und ist daher ein *Kreis* vom Radius $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{1-K}}$.

Aus (6, 84) folgt nun (Fig. 8)

Satz 46. *Die beiden Indikatrizen i_l und i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ der parataktischen Bilder einer Minimalfläche Φ sind kongruente Ellipsen, die gegeneinander um einen rechten Winkel verdreht sind.*

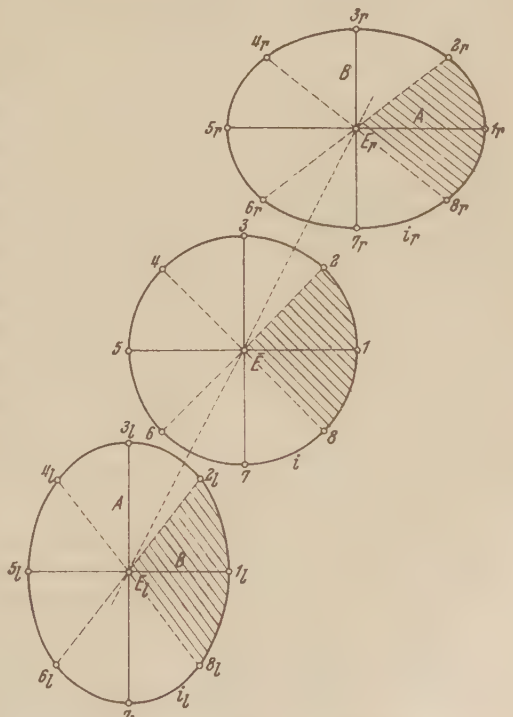

Fig. 8. Die *Indikatrizen* i_l, i_r der parataktischen Abbildung einer isotropen *Minimalfläche*.

Die elliptischen Indikatrizen i_l, i_r liegen also im Falle der Minimalflächen s daß die große Achse A der einen Ellipse und die ihr affin entsprechende klein Achse B der anderen parallel sind.

Nach (6, 85) haben diese Achsen wegen $H = 0$ die Längen

$$A = \frac{1+\sqrt{-K}}{\sqrt{1-K}}, \quad B = \frac{1-\sqrt{-K}}{\sqrt{1-K}}. \tag{7, 16}$$

Sie sind für nicht-ebene Minimalflächen ($K \neq 0$) stets voneinander ve schieden. Da sie einander *parallel zugeordnet* sind, *fallen die Hauptachsen d Indikatrizen* i_l, i_r nach Satz **34** *mit den parataktischen Bildern der Asymp totenrichtungen der Minimalflächen zusammen und sind zu den Grundrisse dieser Richtungen selber parallel.*

Die *parataktischen Bilder der Asymptotenlinien* einer isotropen Minima fläche Φ (und nur einer solchen) bilden in jedem Bildfelde Φ_l, Φ_r ein *Orth gonalsystem*. Es ist dies jedoch, anders als auf der Fläche selber, *kei Isothermsystem*; denn die *Indikatrizen* i_l, i_r der (nicht-ebenen) Minima fläche Φ sind nach (16) *nie kreisförmig*, sondern stets elliptisch.

Zusammenfassend gilt

Satz 47. *Für die flächentreuen Verwandtschaften $\Phi_l \to \Phi_r$, d als Bilder nicht-ebener isotroper Minimalflächen Φ auftreten, ist kenn zeichnend, daß ihre aufeinander parallel bezogenen Kurvennetze Ortho gonalnetze sind. Diese (nichtisothermen) Orthogonalnetze sind die para taktischen Bilder des (isothermen) Netzes der Asymptotenlinien der Minima fläche.*

Die Schar der *assoziierten Minimalflächen* Φ^α (11) können wir kurz i der Form

$$\boxed{z = \Re\,[f(\mathfrak{z}) \cdot e^{-i\alpha}]} \tag{7, 17}$$

schreiben. Um den *Zusammenhang ihrer parataktischen Bilder* zu gewinne ermitteln wir die Stellungsparameter p, q der Tangentialebenen:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}\,[f'(\mathfrak{z}) \cdot e^{-i\alpha} + \bar{f}'(\bar{\mathfrak{z}}) \cdot e^{i\alpha}] = +\,\Re\,[f'(\mathfrak{z}) \cdot e^{-i\alpha}], \\ q = \frac{i}{2}\,[f'(\mathfrak{z}) \cdot e^{-i\alpha} - \bar{f}'(\bar{\mathfrak{z}}) \cdot e^{i\alpha}] = -\,\Im\,[f'(\mathfrak{z}) \cdot e^{-i\alpha}], \end{cases} \tag{7, 18}$$

und bilden daraus die komplexe Verbindung

$$\mathfrak{z}^* = i\,(p + iq) = i\bar{f}'(\bar{\mathfrak{z}}) \cdot e^{i\alpha}. \tag{7, 19}$$

Fassen wir auch die Koordinaten der *parataktischen Bilder* der Fläche punkte $\mathfrak{z}$ zu komplexen Verbindungen $\mathfrak{z}_l$ und $\mathfrak{z}_r$ zusammen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_l &= x_l + iy_l = (x+q) + i\,(y-p) = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^*, \\ \mathfrak{z}_r &= x_r + iy_r = (x-q) + i\,(y+p) = \mathfrak{z} + \mathfrak{z}^*, \end{aligned} \tag{7, 20}$$

so ergeben sich folgende *komplexen Darstellungen der parataktischen Bilder* $(\mathfrak{z}_l^\alpha, \mathfrak{z}_r^\alpha)$ *der assoziierten Minimalflächen*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{z}_l^\alpha &= \mathfrak{z} - i \cdot \bar{f}'(\bar{\mathfrak{z}}) \cdot e^{i\alpha},\\ \mathfrak{z}_r^\alpha &= \mathfrak{z} + i \cdot \bar{f}'(\bar{\mathfrak{z}}) \cdot e^{i\alpha}.\end{aligned}} \tag{7, 21}$$

Aus (21) folgt jetzt

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{z}_l^\alpha - \mathfrak{z} &= (\mathfrak{z}_l^0 - \mathfrak{z}) \cdot e^{i\alpha},\\ \mathfrak{z}_r^\alpha - \mathfrak{z} &= (\mathfrak{z}_r^0 - \mathfrak{z}) \cdot e^{i\alpha},\end{aligned}\right. \tag{7, 22}$$

und das bestätigt den bemerkenswerten

Satz 48. *Ordnet man auf assoziierten isotropen Minimalflächen* Φ^0 *und* Φ^α *solche Punkte einander zu, welche zum selben Grundriß* $\mathfrak{z}$ *gehören (und die sich also auch durch isotrope Biegung der Flächen entsprechen), so hängen die parataktischen Bildpunkte* $(\mathfrak{z}_l^\alpha, \mathfrak{z}_r^\alpha)$ *der Fläche* Φ^α *und* $(\mathfrak{z}_l^0, \mathfrak{z}_r^0)$ *der Fläche* Φ^0 *durch Drehung um die gemeinsamen Mittelpunkte* $\mathfrak{z}$ *durch den Winkel* α *zusammen. Wir nennen diese Transformation eine* α*-Schwenkung. Insbesondere ergeben sich die Bilder konjugierter Minimalflächen* Φ^α *und* $\Phi^{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *auseinander durch (positive) Viertelschwenkung.*

Umgekehrt gilt (Fig. 9)

Satz 49. *Schwenkt man die Bildpaare* $(\mathfrak{z}_l, \mathfrak{z}_r)$ *einer eigentlich-flächentreuen Verwandtschaft* $\Phi_l^0 \to \Phi_r^0$ *mit Indikatrizen* i_l, i_r, *die gegeneinander rechtwinkelig verdreht sind (oder deren parallelbezogene Kurven in* Φ_l^0 *und* Φ_r^0 *je ein Orthogonalnetz bilden), um ihre Mittelpunkte* $\mathfrak{z}$ *durch einen beliebigen aber festen Winkel* α*, so erhält man immer wieder eine flächentreue Verwandtschaft* $\Phi_l^\alpha \to \Phi_r^\alpha$ *gleicher Art. Dabei gehen insbesondere bei Viertelschwenkungen* $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ *die Kurvenpaare der genannten parallelbezogenen Orthogonalnetze der einen Verwandtschaft* $\Phi_l^0 \to \Phi_r^0$ *über in die isometrischen Kurvenpaare der neuen „konjugierten" Verwandtschaft* $\Phi_l^{\frac{\pi}{2}} \to \Phi_r^{\frac{\pi}{2}}$ *und umgekehrt.*

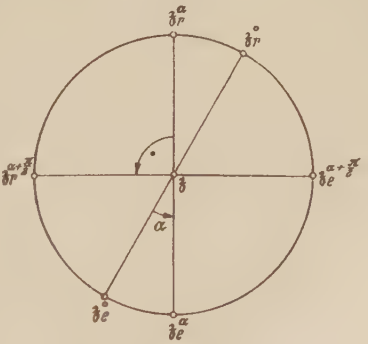

Fig. 9. α-Schwenkung des Punktepaares $(\mathfrak{z}_l^0, \mathfrak{z}_r^0)$.

Denn auf konjugierten Minimalflächen sind den Asymptotenlinien der einen Fläche die isotropen Krümmungslinien der anderen zugeordnet.

Die letzte, auf den Fall der Viertelschwenkung bezügliche Bemerkung ist übrigens ein *Sonderfall* eines umfassenderen *differentialgeometrischen*

Übertragungsprinzips, das man E. Study[26]) verdankt und das sich auf *beliebige analytische Punktverwandtschaften* bezieht.

Man beweist übrigens leicht auch den folgenden allgemeinen

Satz 50. *Nur die zu isotropen Minimalflächen Φ gehörigen flächentreuen Verwandtschaften $\Phi_l \to \Phi_r$ haben die Eigenschaft, durch den Schwenkungsprozeß (mit beliebigem Winkel α) immer wieder in flächentreue Verwandtschaften $\Phi_l \to \Phi_r$ transformiert zu werden.*

VIII. Die parataktische Abbildung der Flächen Φ der festen Relativkrümmung $K = +1$.

51. Übersicht über die allgemeine Theorie der Flächen $K = \text{const}$. Wie ich gezeigt habe[16 II]), kann man die Flächen Φ der festen Relativkrümmung

$$K = rt - s^2 = \text{const} \neq 0 \tag{8, 1}$$

im isotropen Raume in Verallgemeinerung der Ergebnisse von Nr. 40 ebenfalls durch Cliffordsche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander erzeugen. Als *verallgemeinerte Cliffordsche Schiebungsgruppen* dienen dabei die dreigliedrigen Gruppen

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta + y \\ z' &= \gamma - \beta\sqrt{-K}\,x + \alpha\sqrt{-K}\,y + z \end{aligned}\right\} C_3^l,$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b + y \\ z' &= c + b\sqrt{-K}\,x - a\sqrt{-K}\,y + z \end{aligned}\right\} C_3^r. \tag{8, 2}$$

Die *Asymptotenlinien* der Fläche Φ haben nämlich nach dem Satze von *Beltrami-Enneper die feste Torsion*

$$\tau = \pm\sqrt{-K} \tag{8, 3}$$

und liegen daher in *Gewinden* G_+^r, G_-^l der Form

$$dz = A\,dx + B\,dy \pm \sqrt{-K}(x\,dy - y\,dx). \tag{8, 4}$$

Es gilt

Satz 51. *Sind c_+ und c_- zwei beliebige Kurven der isotropen Torsion $+\sqrt{-K}$ und $-\sqrt{-K}$, die in ihrem Schnittpunkt gemeinsame Schmiegebene*

[26]) E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. 1. Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzig-Berlin 1911. Insbes. S. 23.

haben, und verschiebt man c_+ mittels der Gruppe C_3^r längs c_- oder c_- mittels C_3^l längs c_+, so erhält man die allgemeinste Fläche Φ der festen Relativkrümmung K.

Man entnimmt daraus die folgende *analytische Darstellung* dieser Flächen:

$$(8,5)\qquad \begin{cases} x = U_1 + V_1, \quad p = -\sqrt{-K}\,(U_2 - V_2), \\ y = U_2 + V_2, \quad q = +\sqrt{-K}\,(U_1 - V_1), \\ z = U_3 + V_3 + \sqrt{-K}\,(U_1 V_2 - U_2 V_1), \end{cases}$$

wobei die durch die Parameter u bzw. v beschriebenen Kurven

$$(8,6)\qquad (U_1, U_2, U_3) \;\mid\; (V_1, V_2, V_3)$$

den (involutorischen) Gewinden

$$(8,7)\qquad dz = \sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx) \mid dz = -\sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx)$$

in beliebiger Weise entnommen sind.

Die Flächen Φ sind nach G. Scheffers[27]) durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihre *Asymptotenlinien* — in der Darstellung (5) die Linien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ — *im Grundrisse* ein *Schiebnetz* bilden.

52. Die parataktische Abbildung der Flächen Φ fester Relativkrümmung $K \neq 0, -1$. Nach Satz 20 sind die parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ eines *Schmiegstreifens der festen Torsion* $\tau = \tau_0 = \pm\sqrt{-K}$ zwei zueinander *zentrisch ähnliche Kurven*, die aus dem Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}$ durch die Streckungen vom *Modul* $1 \pm \tau_0$ entstehen, und wobei als *Streckungszentrum* der Nullpunkt N der Bildebene π in jenem Gewinde (4) fungiert, in welchem der Streifen enthalten ist.

Es folgt daraus

Satz 52. *Die parataktischen Bilder des Netzes der Asymptotenlinien $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K \neq 0, -1$ bestehen aus zwei ebenen Schiebnetzen $(\mathfrak{U}_l, \mathfrak{V}_l)$ und $(\mathfrak{U}_r, \mathfrak{V}_r)$. Die Paare der Schiebkurven*

$$(\mathfrak{U}_l, \mathfrak{U}_r) \;\mid\; (\mathfrak{V}_l, \mathfrak{V}_r)$$

sind dabei zentrisch ähnlich mit den reziproken Moduln

$$(8,8)\qquad \gamma = \frac{1+\sqrt{-K}}{1-\sqrt{-K}} \;\Big|\; \gamma' = \frac{1-\sqrt{-K}}{1+\sqrt{-K}}.$$

Man bestätigt dieses Ergebnis leicht analytisch. Bedeutet nämlich

$$(8,9)\qquad \bar{\mathfrak{U}} = (U_1, U_2) \;\mid\; \bar{\mathfrak{V}} = V_1, V_2)$$

[27]) G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{const}$. Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 112–117.

die Ortsvektoren des *Grundrisses* eines Flächenpunktes und

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{U}} + \bar{\mathfrak{V}} \tag{8, 10}$$

das *Schiebnetz* des *Asymptotenliniengrundrisses*, so lauten die *parataktischen Bilder* $\bar{\mathfrak{x}}_l, \bar{\mathfrak{x}}_r$ *von* Φ

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_l &= (1 + \sqrt{-K})\,\bar{\mathfrak{U}} + (1 - \sqrt{-K})\,\bar{\mathfrak{V}}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_r &= (1 - \sqrt{-K})\,\bar{\mathfrak{U}} + (1 + \sqrt{-K})\,\bar{\mathfrak{V}}. \end{aligned}} \tag{8, 11}$$

Für $K = -1$ artet die flächentreue Verwandtschaft $\bar{\mathfrak{x}}_l \to \bar{\mathfrak{x}}_r$ in bekannter Weise aus, indem sie sich auf ein Kurvenpaar reduziert.

Nimmt man z. B. als Grundkurven eines Schiebnetzes $\Phi_l(\mathfrak{U}_l, \mathfrak{V}_l)$ zwei beliebige *Kreise* und als Grundkurven eines anderen Schiebnetzes $\Phi_r(\mathfrak{U}_r, \mathfrak{V}_r)$ zwei neue *Kreise*, die aus $\mathfrak{U}_l$ und $\mathfrak{U}_r$ durch zentrische Ähnlichkeiten mit reziproken Moduln (8) hervorgehen, so erhält man zwei flächentreu verwandte Felder (Φ_l, Φ_r), die das parataktische Bild einer *isotropen Schraubfläche der festen Relativkrümmung* K darstellen.

Den beiden zentrisch ähnlichen Kreispaaren entspricht nämlich nach Satz **18** ein Paar von isotropen Schraublinien $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{V}$ mit den festen Torsionen $\tau = \pm\sqrt{-K}$, durch deren Schiebung aneinander eine Schraubfläche der Relativkrümmung K entstehen[16 II]).

53. Die Flächen der Relativkrümmung $K = +1$. Neben den isotropen Minimalflächen kommt den Flächen Φ der festen Relativkrümmung $K = +1$ und ihren parataktischen Bildern besonderes Interesse zu.

Die Formeln (6, 71) und (6, 82) liefern für die *Indikatrizen* dieser Flächen Φ und ihrer parataktischen Bilder Φ_l, Φ_r die *Ellipsen*

$$\begin{cases} i \ldots 2H \cdot II = 1, \\ i_l \ldots H \cdot II_l = 1, \\ i_r \ldots H \cdot II_r = 1. \end{cases} \tag{8, 12}$$

Darin steckt (Fig. 10) der

Satz 53. *Die kongruenten Indikatrizen i_l, i_r der flächentreuen Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$, welche parataktisches Bild einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = +1$ ist, sind zueinander gleichgestellt. Sie sind außerdem ähnlich zum Grundrisse der* Dupinschen *Indikatrix. Ihre gleichlangen konjugierten Durchmesser schließen supplementäre Winkel 2σ und $\pi - 2\sigma$ ein, wobei nach* (6, 86) *die Formel gilt*

$$\sin 2\sigma = \frac{1}{H}. \tag{8, 13}$$

Die kongruenten Indikatrizen i_l, i_r sind dabei affin so aufeinander bezogen, daß der kleinen Hauptachse der einen die große Hauptachse der anderen

Ellipse entspricht und umgekehrt. Nach (6, 85) *und* (13) *sind die Längen A und B dieser Hauptachsen*

$$(8,14) \qquad A = \sqrt{2}\cos\sigma, \quad B = \sqrt{2}\sin\sigma.$$

Daraus folgt weiter

Satz 54. *Die parataktischen Bilder des Netzes der äquimetrischen Kurven einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = +1$ bilden in den Feldern Φ_l und Φ_r zwei orthogonale Kurvennetze, welche durch normale Tangenten aufeinander bezogen sind, und die von den Hauptachsenrichtungen der Indikatrizen i_l, i_r berührt werden.*

54. Die Beziehungen zu E. Studys Geometrie der ebenen analytischen Kurven. Die flächentreuen Verwandtschaften mit gleichgestellten Indikatrizen spielen, wie E. Study [28]) erkannt hat, in der *Theorie der komplexen analytischen Kurven der Ebene* eine ausgezeichnete Rolle. Sie treten dort, in Studys Bezeichnung, als sogenanntes *zweites (reelles) Bild von (komplexen) analytischen Kurven auf.*

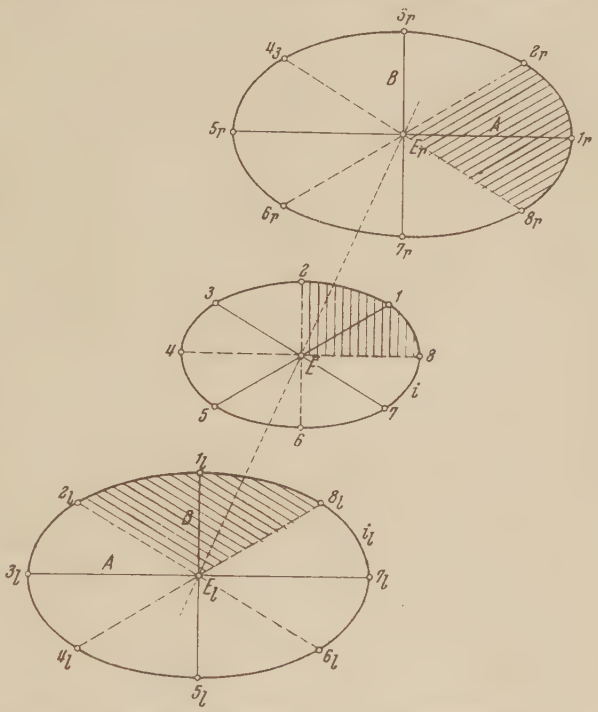

Fig. 10. Die *Indikatrizen* der parataktischen Abbildung einer *Fläche der festen Relativkrümmung* $K = +1$.

Ist nämlich f eine *komplexe analytische Kurve der Ebene* und P ein (komplexer) Punkt auf ihr, so kann man P nach Chr. v. Staudt durch eine (orientierte) *elliptische Involution* und diese wieder durch das (geordnete) Paar (P_l, P_r) ihrer (reellen) *Potenzpunkte* darstellen, welche Study als das *zweite Bildpaar des komplexen Punktes P* bezeichnet [29]). Wir wollen fortan gerne vom *Staudtschen Bildpaar* (P_l, P_r) *von P* sprechen.

---

[28]) E. Study [26]), §§ 6 und 8.

[29]) Zum Unterschiede von ihrem ersten *Laguerreschen Bildpaar*, nämlich den beiden reellen Punkten der Minimalgeraden von P.

Satz 55. *Durchläuft der komplexe Punkt P die komplexe analytische Kurve f, so beschreibt sein* Staudtsches *Bildpaar (P_l, P_r) nach* Study *eine flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ mit gleichgestellten Indikatrizen i_l, i_r, wobei die berührende flächentreue Affinität im gleichen Sinne als* Staudtsches *Bild der (komplexen) Tangente t der Kurve f im Punkte P gedeutet werden kann.*

Es ist von Interesse, die näheren Zusammenhänge aufzudecken, welche zwischen den parataktischen Bildern der Flächen mit der festen Relativkrümmung $K = +1$ und der Theorie der analytischen Kurven der Ebene bestehen.

Nach Formel (5) kann man jede *Fläche Φ der festen Relativkrümmung* $K = +1$ in der folgenden Form darstellen

$$(8,15) \qquad \begin{cases} x = x_1 + x_2, & p = -i(y_1 - y_2), \\ y = y_1 + y_2, & q = \;\; i(x_1 - x_2), \\ z = z_1 + z_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1), \end{cases}$$

unter

$$(8,16) \qquad \mathfrak{U}\{x_1(u), y_1(u), z_1(u)\} \mid \mathfrak{V}\{x_2(v), y_2(v), z_2(v)\}$$

beliebige (*analytische*) *Kurven* der Gewinde

$$(8,17) \qquad dz_1 = +i(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) \mid dz_2 = -i(x_2\,dy_2 - y_2\,dx_2)$$

verstanden, die konjugiert-komplex zu wählen sind, wenn die Fläche Φ reell sein soll. Wir wollen daher setzen:

$$(8,18) \qquad \overline{\mathfrak{U}}\begin{cases} x_1 = \dfrac{u+iv}{2}, \\ y_1 = \dfrac{P(u,v) + iQ(u,v)}{2}, \end{cases} \quad \overline{\mathfrak{V}}\begin{cases} x_2 = \dfrac{u-iv}{2}, \\ y_2 = \dfrac{P(u,v) - iQ(u,v)}{2} \end{cases}$$

und fordern die *Cauchy-Riemannschen Analytizitätsbedingungen*

$$(8,19) \qquad \boxed{P_u = Q_v,\; P_v = -Q_u,}$$

so daß

$$(8,20) \qquad P(u,v) + iQ(u,v) = f(u+iv)$$

eine (komplexe) *analytische Funktion* der komplexen Variablen $(u+iv)$ ist.

Die *parataktischen Bilder* (Φ_l, Φ_r) dieser Fläche Φ sind dann nach (11) die folgenden:

$$(8,21) \qquad \begin{aligned} \Phi_l &\begin{cases} x_l = (1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2, \\ y_l = (1+i)\,y_1 + (1-i)\,y_2, \end{cases} \\ \Phi_r &\begin{cases} x_r = (1-i)\,x_1 + (1+i)\,x_2, \\ y_r = (1-i)\,y_1 + (1+i)\,y_2, \end{cases} \end{aligned}$$

welche Gleichungen in Übereinstimmung mit Satz 52 besagen, daß *die parataktischen Bildfelder Φ_l, Φ_r von zwei flächentreu bezogenen konjugiert-*

komplexen Schiebnetzen überdeckt sind, deren Kurven zueinander zentrisch ähnlich sind mit den reziproken Moduln

$$\gamma = \frac{1+i}{1-i} = i, \quad \Big| \quad \gamma' = \frac{1-i}{1+i} = -i.$$

Zieht man (18) heran, so erhält man die *reellen Formeln*

(8, 22)
$$\boxed{\Phi_l \begin{cases} x_l = u - v, \\ y_l = P(u,v) - Q(u,v), \end{cases} \qquad \Phi_r \begin{cases} x_r = u + v, \\ y_r = P(u,v) + Q(u,v). \end{cases}}$$

Man bestätigt sofort, daß *umgekehrt* durch diese Formeln (22) unter der Voraussetzung (19) stets eine *flächentreue Verwandtschaft* $\Phi_l \to \Phi_r$ dargestellt ist, und zwar eine solche, die parataktisches *Bild einer Fläche* Φ *der Relativkrümmung* $K = +1$ *ist.*

In der Tat ist wegen (19)

(8, 23)
$$\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(u, v)} = P_v - Q_u = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(u, v)},$$

d. h. die Verwandtschaft ist flächentreu. Weiter folgt aus (22) unter Benutzung der Formeln (1, 2) und der Tatsache, daß wegen (23) der Ausdruck $p\,dx + q\,dy$ ein totales Differential dz ist, die folgende *Darstellung der* zur Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ gehörigen *Fläche* Φ:

(8, 24)
$$\Phi \quad \boxed{\begin{aligned} &x = u, && p = Q(u,v), \\ &y = P(u,v), && q = -v, \\ &z = \int_a^u Q(u,v)\,du + \int_b^v P(a,v)\,dv + b\,P(a,b) - v\,P(u,v). \end{aligned}}$$

Aus ihr ergibt sich

(8, 25)
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = P_v$$

und wegen (23), (25) und (6, 8)

(8, 26)
$$\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)} = \frac{P_v - Q_u}{P_v} = 1 + K,$$

d. h. wegen (19) ist wirklich $K = +1$.

Auszunehmen ist dabei allein der Fall der *isotropen Kugel* der Relativkrümmung $K = +1$. Für eine solche ist nämlich der Parameter $p = \pm 1$ und ihr *parataktisches Bild* ist eine *Vierteldrehung* der Bildebenen gegeneinander. Die dazugehörige analytische Funktion $f(x + iy)$ ist eine *Konstante.*

Aus den Formeln (22) folgert man

(8, 27)
$$\boxed{\begin{aligned} x_l + i x_r &= (1+i)\cdot(u+iv) \\ y_l + i y_r &= (1+i)\cdot\big(P(u,v) + i\,Q(u,v)\big) = (1+i)\cdot f(u+iv) \end{aligned}}$$

und sieht, daß *mindestens eine der komplexen Größen* $x_l + ix_r$ *oder* $y_l + iy_r$ *eine komplexe analytische Funktion der anderen* ist.

Das ist nach E. Study[28]) in der Tat auch notwendig und hinreichend dafür, daß eine *Schar von* ∞^2 *geordneten Paaren reeller Punkte* $P_l(x_l, y_l)$ *und* $P_r(x_r, y_r)$ *Staudtsches Bild einer komplexen analytischen ebenen Kurve* f *ist. Die Gleichung dieser Kurve* f der (ξ, η)-Ebene ist

$$f \ldots \eta = f(\xi). \tag{8, 28}$$

Auszuschließen sind dabei lediglich die *komplexen Geraden von reeller Richtung.* Deren Staudtsches Bild degeneriert in die Punktepaare P_l, P_r, welche *zwei parallelen Geraden* entnommen sind.

Jede andere (eigentliche) *komplexe Gerade* hat als Staudtsches Bild eine reguläre eigentlich-flächentreue *affine Verwandtschaft* mit gleichgestellten Indikatrizen.

Zusammenfassend gilt also

Satz 56. *Die Staudtschen Bildpaare* $P_l(x_l, y_l)$, $P_r(x_r, y_r)$ *der komplexen Punkte* $P(\xi, \eta)$ *einer ebenen komplexen analytischen Kurve* f *der Gleichung* $\eta = f(\xi)$ *bilden eine eigentlich-flächentreue Verwandtschaft* $f_l \to f_r$ *mit gleichgestellten Indikatrizen* i_l, i_r, *welche überall dort regulär ist, wo die Richtung der Tangente von* f *nicht reell ist. Diese flächentreue Verwandtschaft ist zugleich parataktisches Abbild einer Fläche* Φ *der festen Relativkrümmung* $K = +1$ *des isotropen Raumes, deren Regularität nur dort unterbrochen ist, wo die zugehörigen Punkte* P *auf* f *reelle Tangentenrichtung aufweisen. Die Fläche* Φ *ist erzeugbar als isotrope Cliffordsche Schiebfläche ihrer konjugiert-komplexen Asymptotenlinien, deren Grundrisse ein Schiebnetz aus konjugiert-komplexen analytischen Kurven* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ *bilden der Darstellung*

$$\overline{\mathfrak{U}}\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(u + iv), \\ y_1 = \frac{1}{2} f(u + iv), \end{cases} \qquad \overline{\mathfrak{V}}\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(u - iv), \\ y_2 = \frac{1}{2} \bar{f}(u - iv). \end{cases} \tag{8, 29}$$

Insonderheit entsprechen den Geraden nicht reeller Richtung der komplexen Ebene im isotropen Raume die Cliffordschen Flächen der Relativkrümmung $K = +1$. *Im ausgeschlossenen Falle komplexer Geraden mit reeller Richtung ergäben sich im Raume nur die Elementvereine nicht-isotroper Geraden.*

Aus unseren bisherigen Ergebnissen fließt übrigens

Satz 57. *Die zweimal stetig differenzierbaren Integrale* $z = z(x, y)$ *der Monge-Ampèreschen Gleichung*

$$rt - s^2 = 1$$

sind analytisch.

55. Ein differentialgeometrisches Übertragungsprinzip. Die Geometrie des isotropen Raumes enthält nach den letzten Ergebnissen in den *Flächen Φ der festen Relativkrümmung* $K = +1$ ein überaus anschauliches und geometrisch leicht zugängliches *reelles Modell der Geometrie der ebenen komplexen analytischen Kurven* f. Der Zusammenhang zwischen der reellen Fläche Φ und der komplexen Kurve f liegt dabei darin, daß das parataktische Bild (Φ_l, Φ_r) von Φ und das STAUDTsche Bild (f_l, f_r) von f identisch sind.

Satz 58. *Durch Zusammensetzung der STAUDTschen Abbildung der komplexen Punkte P der Ebene auf Paare reeller Punkte (P_l, P_r) mit der parataktischen Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene haben wir ein wertvolles Übertragungsprinzip gewonnen, das die komplexe Geometrie der Ebene und die reelle Geometrie des isotropen Raumes verbindet, und das darin besteht, daß solche komplexe Punkte P der Ebene und Flächenelemente E des isotropen Raumes einander zugeordnet werden, deren STAUDTsche und parataktische Bilder identisch sind* $(P_l = E_l,\ P_r = E_r)$.

Um noch weiteren Einblick in die Art dieses bemerkenswerten differentialgeometrischen Übertragungsprinzips zu gewinnen, gehen wir nochmals aus von der *komplexen analytischen Kurve* f (28), sowie von der zu ihr durch STAUDTsche Abbildung gehörigen *flächentreuen Verwandtschaft* (27) bzw. (22) und der ihr parataktisch entsprechenden *Fläche* Φ (24) der Relativkrümmung $K = +1$. Wir berechnen das (komplexe) *Bogenelement* $d\sigma$ *der Kurve* f (28) und finden

$$(8,30)\quad \begin{aligned} d\sigma^2 &= [1 + f'^2(\xi)]\, d\xi^2 = [1 + (P_u + i\,Q_u)^2]\,(du + i\,dv)^2 \\ &= [(1 + P_u^2 - Q_u^2)\,(du^2 - dv^2) - 4\,P_u\,Q_u\,du\,dv] + \\ &\quad + 2\,i\,[P_u\,Q_u(du^2 - dv^2) + (1 + P_u^2 - Q_u^2)\,du\,dv]. \end{aligned}$$

Wir berechnen ferner die *vier isotropen Grundformen der Fläche* Φ (24) und finden unter Berücksichtigung der CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen (19)

$$(8,31)\quad \begin{cases} I = (1 + P_u^2)\,du^2 + 2\,P_u\,P_v\,du\,dv + P_v^2\,dv^2, \\ II = Q_u(du^2 + dv^2), \\ III = Q_u^2\,du^2 + 2\,Q_u\,Q_v\,du\,dv + (1 + Q_v^2)\,dv^2, \\ IV = 2\,[P_u\,P_v\,du^2 - (1 + P_u^2 - P_v^2)\,du\,dv - P_u\,P_v\,dv^2]. \end{cases}$$

Es folgt daraus nach (19) für das komplexe Bogenelement $d\sigma$ der Kurve f die Darstellung

$$(8,32)\quad \boxed{d\sigma^2 = (I - III) - i \cdot IV.}$$

Darin steckt im Hinblick auf die Formeln (5, 20) und (5, 35) der

Satz 59. *Durch das Übertragungsprinzip, welches die Theorie der komplexen Kurven f der Ebene und die Theorie der Flächen Φ der Relativkrümmung*

$K = +1$ des isotropen Raumes verknüpft, entsprechen den Fäden (= einparametrigen Örtern komplexer Punkte) von f mit reellem Linienelementquadrat ($d\sigma^2 = I - III$) die isotropen Krümmungslinien der Fläche Φ, den Fäden mit rein-imaginärem Linienelementquadrat ($d\sigma^2 = -iIV$) aber entsprechen die äquimetrischen Kurven von Φ.

In der flächentreuen Verwandtschaft $f_l \to f_r$ ihrer Staudtschen *Bilder sind diesen Fäden die isometrischen bzw. die orthogonalbezogenen Kurvenpaare zugeordnet.*

Nach (31) verschwindet die zweite Grundform II der Fläche Φ identisch längs jener *Kurve C*, für welche $Q_u = 0$ ist. Diese Kurve C ist ein *singulärer Schmiegstreifen* der Fläche und damit im allgemeinen für sie *Rückkehrkante*, zugleich Hüllkurve ihrer (komplexen) Asymptotenlinien. *Auf der komplexen ebenen Kurve f entspricht ihr jener Faden, dessen Punkte (wegen $Q_u = 0$) Tangenten reeller Richtung besitzen.*

56. E. Studys flächentreue Spiegelung an einer reellen analytischen Kurve der Ebene. Wir wenden uns nun dem Sonderfalle zu, wo die ebene analytische Kurve f (28) reell ist, d. h., wo die Koeffizienten der analytischen Funktion $f(\xi)$ reell sind.

Das Staudtsche Bild der reellen Kurve f ist involutorisch; denn mit einem komplexen Punkte P kommt auf ihr auch der konjugiert-komplexe Punkt $\bar{P}$ vor. Mit dem geordneten Paare (P_l, P_r) gehört also wirklich auch das Paar (P_r, P_l) der flächentreuen Verwandtschaft an. Insbesondere sind *die reellen Kurvenpunkte R mit ihren beiden Staudtschen Bildern identisch* ($R_l = R_r = R$).

Diese besonderen, nämlich involutorischen flächentreuen Verwandtschaften mit gleichgestellten Indikatrizen können nach E. Study [30]) als ein *Gegenstück* der *Schwarzschen konformen Spiegelung* an einer reellen analytischen Kurve aufgefaßt werden. Study hat sie daher als *flächentreue Spiegelungen an der (krummen) reellen analytischen Kurve f bezeichnet.*

Wir beweisen den

Satz 60. *Der flächentreuen Spiegelung an der reellen analytischen (krummen) Kurve f der Bildebene π ($z = 0$) entspricht im isotropen Raume eine reelle (bis auf vollisotrope Schiebungen eindeutig bestimmte) zur Bildebene π symmetrische Fläche Φ der Relativkrümmung $K = rt - s^2 = +1$. Die reelle ebene Kurve f ist eine Rückkehrkante der Fläche Φ.*

Umgekehrt liefert jede reelle zur Ebene π ($z = 0$) symmetrische Fläche Φ der Relativkrümmung $K = +1$ als parataktisches Bild eine

---

[30]) E. Study [26]), S. 88—89.

eindeutig bestimmte flächentreue Spiegelung an einer reellen analytischen Kurve f von Φ, nämlich die Spiegelung an der ebenen Spurkurve f von Φ auf π.

Zum Beweise genügt es zu bemerken, daß zwei zur Bildebene π symmetrische Flächenelemente E und $\overline{E}$ vertauschte parataktische Bildpaare ($\overline{E}_l = E_r$, $\overline{E}_r = E_l$) haben.

Es ist möglich, die zu einer vorgegebenen *reellen* ebenen analytischen Kurve f der Darstellung

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \qquad (\xi, \eta \text{ reell!}) \tag{8, 33}$$

gehörige symmetrische Fläche Φ explizit anzugeben. Es handelt sich dabei um das *Problem, durch den ebenen Schmiegstreifen der Kurve* (33) *der Darstellung*

$$\begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \\ z = 0 \\ p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \tag{8, 34}$$

die Fläche Φ der Relativkrümmung

$$K = rt - s^2 = +1 \tag{8, 35}$$

zu legen.

Dies *Cauchysche Problem* kann in einfacher Weise *allgemein* zunächst für einen beliebigen Streifen der Darstellung

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ p = p(t) \\ q = q(t) \end{cases} \qquad dz = p\,dx + q\,dy \tag{8, 36}$$

gelöst werden, wenn es sich um die Flächen Φ^* der Relativkrümmung $K = -1$ handelt, vorausgesetzt, daß (36) nicht ein Schmiegstreifen der Torsion $\tau = \pm 1$ ist[31]).

Das parataktische Bild des Streifens besteht dann aus den beiden (nicht punktförmigen) *Kurven*

$$\bar{\mathfrak{x}}_l \begin{cases} x_l = x + q, \\ y_l = y - p, \end{cases} \qquad \bar{\mathfrak{x}}_r \begin{cases} x_r = x - q, \\ y_r = y + p \end{cases} \tag{8, 37}$$

---

[31]) K. Strubecker, Zum Cauchyschen Problem der Differentialgleichung $rt - s^2 = K$. Deutsche Mathematik 6 (1942), S. 507–524. Ferner die Note [19]), Nr. 41.

und diese Kurven stellen auch schon nach Nr. 40 das parataktische Bild der Fläche Φ^* vor, wenn man sie unabhängig voneinander beschreibt, also

$$(8,38)\qquad \bar{\mathfrak{x}}_l(u)\begin{cases} x_l = x(u) + q(u), \\ y_l = y(u) - p(u), \end{cases} \quad \bar{\mathfrak{x}}_r(v)\begin{cases} x_r = x(v) - q(v), \\ y_r = y(v) + p(v) \end{cases}$$

setzt.

Man gewinnt daraus die folgende *Darstellung der Fläche* Φ^*

$$(8,39)\qquad \begin{cases} x = \frac{x_l + x_r}{2} = \frac{1}{2}[x(u) + x(v) + q(u) - q(v)], \\ y = \frac{y_l + y_r}{2} = \frac{1}{2}[y(u) + y(v) - p(u) + p(v)], \\ p = \frac{y_r - y_l}{2} = \frac{1}{2}[p(u) + p(v) - y(u) + y(v)], \\ q = \frac{x_l - x_r}{2} = \frac{1}{2}[q(u) + q(v) + x(u) - x(v)], \end{cases}$$

wobei sich das noch fehlende $z = z(u, v)$ durch Integration über das totale Differential $dz = p\,dx + q\,dy$ ergibt. Man findet, wenn die Grenzen der Integration so eingerichtet werden, daß sich für $u = v = t$ die Flächenelemente des Anfangsstreifens (36) ergeben:

$$(8,40)\qquad \begin{aligned} z = {} & \tfrac{1}{2}[z(u) + z(v)] + \tfrac{1}{4}\int_u^v [(y\,dx - x\,dy) + (q\,dp - p\,dq)] + \\ & + \tfrac{1}{4}\{[x(u)\,y(v) - x(v)\,y(u)] + [q(u)\,p(v) - q(v)\,p(u)] + \\ & + [x(u) - x(v)]\cdot[p(v) - p(u)] + [y(u) - y(v)]\cdot[q(v) - q(u)]\}. \end{aligned}$$

Die Relativkrümmung der Fläche erhält nun den festen Wert K, wenn man bei z, p und q den Faktor $\sqrt{-K}$ anbringt, insbesondere den Wert $K = +1$, wenn man den Faktor i anbringt.

Daher kann *die durch den ebenen Schmiegstreifen* (34) *der reellen analytischen Kurve* f *gelegte symmetrische Fläche* Φ *der Relativkrümmung* $K = +1$ durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$(8,41)\qquad \Phi\quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}[\xi(u) + \xi(v)], \\ y &= \frac{1}{2}[\eta(u) + \eta(v)], \\ z &= \frac{i}{4}\int_u^v (\eta\,d\xi - \xi\,d\eta) + \frac{i}{4}[\xi(u)\,\eta(v) - \xi(v)\,\eta(u)], \\ p &= \frac{i}{2}[\eta(v) - \eta(u)], \\ q &= \frac{i}{2}[\xi(u) - \xi(v)]. \end{aligned}}$$

Führt man an Stelle von u und v konjugiert-komplexe Parameter

$$u = \alpha + i\beta, \quad v = \alpha - i\beta \tag{8, 42}$$

ein, so erhält man eine *reelle Darstellung der reellen Fläche* Φ.

Satz 61. *Die reelle Fläche* Φ (41) *der Relativkrümmung* $K = +1$ *ist zur Bildebene* $z = 0$ *symmetrisch und enthält die ebene reelle analytische (krumme) Kurve* f (33) *als Rückkehrkante* ($u = v = t$). *Ihr parataktisches Abbild ist die zur Kurve* f *gehörige* Studysche *flächentreue Spiegelung.*

In der Tat findet man als *parataktische Bilder* von Φ nach (1, 1) die Punkte

$$\Phi_l \begin{cases} x_l = \dfrac{(1+i)\cdot\xi(\alpha+i\beta) + (1-i)\cdot\xi(\alpha-i\beta)}{2}, \\ y_l = \dfrac{(1+i)\cdot\eta(\alpha+i\beta) + (1-i)\cdot\eta(\alpha-i\beta)}{2}, \end{cases}$$

$$\Phi_r \begin{cases} x_r = \dfrac{(1-i)\cdot\xi(\alpha+i\beta) + (1+i)\cdot\xi(\alpha-i\beta)}{2}, \\ y_r = \dfrac{(1-i)\cdot\eta(\alpha+i\beta) + (1+i)\cdot\eta(\alpha-i\beta)}{2}, \end{cases} \tag{8, 43}$$

und erhält daraus

$$\boxed{\begin{aligned} x_l + i x_r &= (1+i)\cdot\xi(\alpha+i\beta), \\ y_l + i y_r &= (1+i)\cdot\eta(\alpha+i\beta). \end{aligned}} \tag{8, 44}$$

Das sind aber im Wesen genau die Formeln (27) für Studys *flächentreue Spiegelung* $(x_l, y_l) \to (x_r, y_r)$ *an der reellen analytischen Kurve* (33).

57. Die Staudtsche Abbildung eines reellen Kreises als parataktisches Bild einer Drehfläche der Relativkrümmung $K = +1$. Wir wollen dieses Übertragungsprinzip noch in einer Reihe von bemerkenswerten Sonderfällen studieren, deren Auswahl auf den Interessenkreis des erwähnten Büchleins von E. Study[26]) abgestimmt ist. Es soll sich dabei um den *Zusammenhang* handeln, der *zwischen den isotropen Dreh- und Schraubflächen der Relativkrümmung* $K = +1$ *und den reellen und komplexen Kreisen der Ebene* besteht, deren zum Teil etwas verwickeltes Staudtsches Bild von Study ziemlich eingehend studiert wurde.

Ich beginne mit dem einfachen Zusammenhange zwischen den *reellen Kreisen* f der Ebene und den *Drehflächen* Φ der Relativkrümmung $K = +1$.

Die parataktische Abbildung ist ihrer Definition nach gegen Drehungen um vollisotrope Achsen unempfindlich. Einer (reellen) *Drehfläche* Φ der Relativkrümmung $K = +1$ entspricht daher in unserer Übertragung notwendig eine drehsymmetrische ebene analytische Kurve, also ein *Kreis* f,

und zwar, da Φ *symmetrisch* zur Bildebene π ist, ein *reeller Kreis* f, dessen STAUDTsches Bild (f_l, f_r) sich mit dem parataktischen Bilde (Φ_l, Φ_r) der Drehfläche deckt.

Es gibt in der Bildebene $\pi\,(z = 0)$ *zwei Arten* f^I, f^{II} *reeller Kreise* der Gleichung

$$(8,45) \qquad f^I \ldots x^2 + y^2 - 1 = 0 \mid f^{II} \ldots x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Dementsprechend gibt es auch im wesentlichen[32]) *zwei Typen von Drehflächen der Relativkrümmung* $K = +1$, der Gleichungen

$$(8,46) \quad \Phi^I \ldots z = \int_1^r \sqrt{r^2 - 1}\, dr, \qquad \Phi^{II} \ldots z = \int_0^r \sqrt{r^2 + 1}\, dr.$$

Φ^I hat den reellen einteiligen Kreis f^I und ähnlich Φ^{II} den reellen nullteiligen Kreis f^{II} als *Rückkehrkante*.

Setzt man

$$(8,47) \qquad r = ch\,\psi \mid r = sh\,\psi,$$

so erhält man die folgende einfache *Gaussssche Parameterdarstellung der Flächen* Φ

$$(8,48) \qquad \begin{array}{l|l} \Phi^I & \Phi^{II} \\ x = ch\,\psi\cos\varphi & x = +sh\,\psi\sin\varphi \\ y = ch\,\psi\sin\varphi & y = -sh\,\psi\cos\varphi \\ z = \int_0^\psi sh^2\,\psi\,d\psi & z = \int_0^\psi ch^2\,\psi\,d\psi \\ p = sh\,\psi\cos\varphi & p = +ch\,\psi\sin\varphi \\ q = sh\,\psi\sin\varphi & q = -ch\,\psi\cos\varphi. \end{array}$$

Die *flächentreue Spiegelung* $\Phi_l \to \Phi_r$ *an den reellen Kreisen* f^I und f^{II} ordnet die folgenden Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_l$, $\bar{\mathfrak{x}}_r$ einander *involutorisch* zu:

$$(8,49) \qquad \begin{array}{l|l} \bar{\mathfrak{x}}_l \begin{cases} x_l = ch\,\psi\cos\varphi + sh\,\psi\sin\varphi, \\ y_l = ch\,\psi\sin\varphi - sh\,\psi\cos\varphi, \end{cases} & \bar{\mathfrak{x}}_l \begin{cases} x_l = sh\,\psi\sin\varphi - ch\,\psi\cos\varphi, \\ y_l = -sh\,\psi\cos\varphi - ch\,\psi\sin\varphi, \end{cases} \\ \bar{\mathfrak{x}}_r \begin{cases} x_r = ch\,\psi\cos\varphi - sh\,\psi\sin\varphi, \\ y_r = ch\,\psi\sin\varphi + sh\,\psi\cos\varphi, \end{cases} & \bar{\mathfrak{x}}_r \begin{cases} x_r = sh\,\psi\sin\varphi + ch\,\psi\cos\varphi, \\ y_r = -sh\,\psi\cos\varphi + ch\,\psi\sin\varphi. \end{cases} \end{array}$$

[32]) D.h. abgesehen vom Falle der Paare isotroper *Einheitskugeln* $z = \pm\,{}^1/_2(x^2 + y^2)$, die sich parataktisch auf die beiden Vierteldrehungen um den Ursprung abbilden und denen im STAUDTschen Sinne der reelle Nullkreis $x^2 + y^2 = 0$ entspricht. Vgl. die Nr. 48 bis 50 meiner Note [16 II]).

Konstruktiv können diese flächentreuen Spiegelungen an den reellen Kreisen f^I und f^{II} durch die beiden folgenden Figuren (Fig. 11 und 12) wiedergegeben werden, welche lediglich die *Konstruktion der* Staudtschen *Bilder* $\bar{x}_l, \bar{x}_r$ *der (komplexen) Schnittpunkte der reellen Geraden* g *mit den Kreisen* f^I *und* f^{II} *enthalten.*

Bevor wir uns nun der Frage nach jenen Flächen Φ des isotropen Raumes zuwenden, die nach unserem Übertragungsprinzip den *komplexen Kreisen*

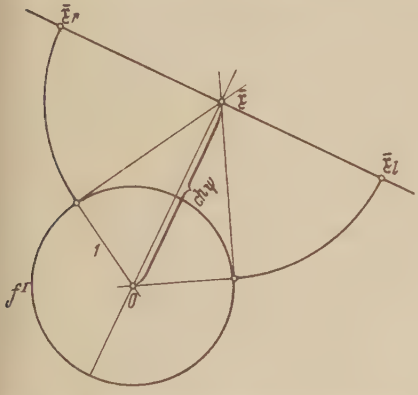

Fig. 11. Die flächentreue Spiegelung $\bar{x}_l \to \bar{x}_r$ am einteiligen Kreise f^I vom Radius $R = 1$.

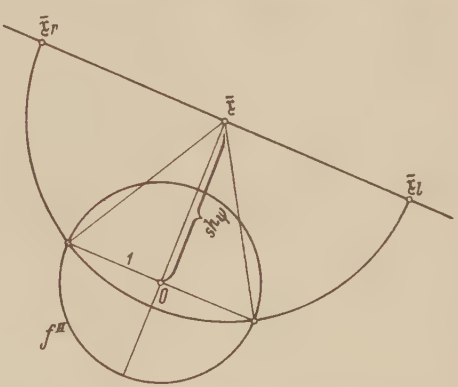

Fig. 12. Die flächentreue Spiegelung $\bar{x}_l \to \bar{x}_r$ am nullteiligen Kreise f^{II} vom Radius $R = i$.

der Ebene entsprechen, ist es zweckmäßig, einen wichtigen Zusammenhang aufzudecken, der zwischen den *komplexen Translationen der Ebene* und den *Grenzbewegungen des isotropen Raumes* besteht.

58. Übertragung der Translationen der komplexen Ebene auf die Grenzbewegungen des isotropen Raumes. Es sei $P\,(\xi = a + ia',\ \eta = b + ib')$ ein *komplexer Punkt* der Ebene. Sein reelles *Staudtsches Bildpaar ist*

$$P_l \begin{cases} x_l = a - a', \\ y_l = b - b'; \end{cases} \qquad P_r \begin{cases} x_r = a + a', \\ y_r = b + b'. \end{cases} \tag{8, 50}$$

Deutet man es als *parataktisches Bildpaar*, so gehört es zu dem (nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmten) Flächenelemente E der Koordinaten

$$E \begin{cases} x = a, & p = +b', \\ y = b, & q = -a', \\ z = c = \text{beliebig}. \end{cases} \tag{8, 51}$$

Wir wollen nun auf die komplexen Punkte P der Ebene eine *komplexe Translation* $P \to P'$ ausüben der Darstellung

$$P' \begin{cases} \xi' = \xi + \mu = (a + m) + i\,(a' + m'), \\ \eta' = \eta + \nu = (b + n) + i\,(b' + n'). \end{cases} \tag{8, 52}$$

Dieser Translation $P \to P'$ entspricht im isotropen Raume eine *Elemententransformation* $E \to E'$, die nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmt ist, und die man daher durch die *Forderung* präzisieren kann, *Berührungstransformation* zu sein. Man erhält so aus (50) bis (52) den folgenden Zusammenhang zwischen den Elementen E und E'

$$(8,53) \qquad E' \begin{cases} x' = m + x, \\ y' = n \quad + y, \\ z' = c + n'x - m'y + z \qquad (c = \text{beliebig}), \\ p' = n' + p, \\ q' = -m' \quad + q. \end{cases}$$

Im Vergleich mit (1, 9) gibt das den wichtigen

Satz 62. *Bildet man die komplexen Punkte P der Ebene durch Zusammensetzung der* Staudtschen *und der parataktischen Abbildung auf Flächenelemente E des isotropen Raumes ab, so entsprechen den komplexen Translationen der Ebene genau dann die Grenzbewegungen des isotropen Raumes, wenn man die Forderung stellt, daß diese (nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmten) Transformationen der Flächenelemente E Berührungstransformationen seien.*

Den ebenen komplexen Translationen in reeller Richtung [$\mu = m(1 + hi)$, $\nu = n(1 + hi)$] *entsprechen bei dieser Übertragung die verallgemeinerten* Cliffordschen *Schiebungen des isotropen Raumes der Form*

$$(8,54) \qquad \begin{cases} x' = m + x, \\ y' = n \quad + y, \\ z' = c + hnx - hmy + z. \end{cases}$$

Für $h = -1$ ergeben sich dabei insbesondere die Links-, für $h = +1$ die Rechtsschiebungen.

59. Komplexe Kreise und ihre Übertragung auf Schraubflächen der Relativkrümmung $K = +1$. Ein *komplexer Kreis* f hat komplexen Mittelpunkt $M(\mu, \nu)$ und komplexen Radius

$$(8,55) \qquad R = r + is.$$

Wir wollen zeigen, daß ihm durch unser Übertragungsprinzip eine *isotrope Schraubfläche Φ der Relativkrümmung $K = +1$* zugeordnet ist. Auch die Umkehrung ist richtig.

Zum Beweise kann man zunächst durch die *komplexe Translation* vom Vektor $(-\mu, -\nu)$ den Mittelpunkt M in den Ursprung O des Koordinaten-

systems bringen. Nach Satz 62 bedeutet das für die Fläche Φ im isotropen Raume lediglich eine *Grenzbewegung*. Es genügt also, einen *komplexen Kreis* f der Gestalt

(8, 56) $$f \ldots \xi^2 + \eta^2 = R^2$$

zu wählen.

Bedeutet

(8, 57) $$\Phi = \varphi + i\,\psi$$

einen komplexen Polarwinkel, so lautet der Kreis parametrisch

(8, 58) $$f \ldots \begin{cases} \xi = R\cos\Phi, \\ \eta = R\sin\Phi. \end{cases}$$

Nach (27) gewinnt man die *Staudtschen Bilder* (f_l, f_r) der *komplexen Punkte von* f aus den Formeln

(8, 59) $$\boxed{\begin{aligned} x_l + i\,x_r &= (1+i)\cdot\xi = (1+i)\cdot R\cos\Phi, \\ y_l + i\,y_r &= (1+i)\cdot\eta = (1+i)\cdot R\sin\Phi. \end{aligned}}$$

Führt man hier die Werte von R und Φ aus (55) und (57) ein und sondert Reelles und Imaginäres, so erhält man folgende *Staudtschen Bildpaare* (f_l, f_r) der Kreispunkte

(8, 60) $$\boxed{\begin{aligned} f_l &\begin{cases} x_l = (r-s)\cos\varphi\,ch\,\psi + (r+s)\sin\varphi\,sh\,\psi, \\ y_l = (r-s)\sin\varphi\,ch\,\psi - (r+s)\cos\varphi\,sh\,\psi, \end{cases} \\ f_r &\begin{cases} x_r = (r+s)\cos\varphi\,ch\,\psi - (r-s)\sin\varphi\,sh\,\psi, \\ y_r = (r+s)\sin\varphi\,ch\,\psi + (r-s)\cos\varphi\,sh\,\psi. \end{cases} \end{aligned}}$$

Deutet man diese *eigentlich-flächentreue Verwandtschaft* $f_l \to f_r$ *mit gleichgestellten Indikatrizen* als *parataktisches Bild* $\Phi_l \to \Phi_r$ *einer Fläche* Φ, so gewinnt man für sie nach (1, 1) und durch Integration von $dz = p\,dx + q\,dy$ folgende Darstellung

(8, 61) $$\Phi \ldots \boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,ch\,\psi + s\sin\varphi\,sh\,\psi, \\ y &= r\sin\varphi\,ch\,\psi - s\cos\varphi\,sh\,\psi, \\ z &= \frac{r^2+s^2}{2}sh\,\psi\,ch\,\psi - \frac{r^2-s^2}{2}\psi - rs\,\varphi, \\ p &= r\cos\varphi\,sh\,\psi + s\sin\varphi\,ch\,\psi, \\ q &= r\sin\varphi\,sh\,\psi - s\cos\varphi\,ch\,\psi. \end{aligned}}$$

Das sind in der Tat *Schraubflächen der Relativkrümmung* $K = +1$, und zwar abgesehen von der Lage im isotropen Raume, auch die *allgemeinsten* ihrer Art. Sie entstehen z. B., indem man die ψ-Linie vom Parameter $\varphi = 0$

$$(8,62)\qquad \begin{cases} x = \quad r\,ch\,\psi, & p = \quad r\,sh\,\psi, \\ y = -s\,sh\,\psi, & q = -s\,ch\,\psi, \\ z = \dfrac{r^2+s^2}{2}\,sh\,\psi\,ch\,\psi - \dfrac{r^2-s^2}{2}\,\psi \end{cases}$$

mit dem Parameter $k = -rs$ um die z-Achse verschraubt. Es wird sich zeigen, daß dies die *Fallinien* der Fläche Φ sind.

Ersichtlich erhält man in (61) für $s = 0$ bzw. $r = 0$, also für *reellen* oder *rein imaginären Kreisradius* R die *Drehflächen der Nr.* 57.

Wir bemerken, daß für die Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$ der Schraubfläche Φ die folgenden Ausdrücke σ und ϱ *konstante Werte* haben

$$(8,63)\qquad \varrho = (x^2 + y^2) - (p^2 + q^2) = r^2 - s^2, \quad \sigma = 2\,(py - qx) = 2\,rs.$$

Es ist nach (61)

$$(8,64)\qquad \varrho + i\,\sigma = (r + is)^2 = R^2.$$

Die Schraubflächen Φ (55) gestatten eine *zweigliedrige Gruppe* $\mathfrak{B}_2$ *von Berührungstransformationen* in sich, die man durch unser Übertragungsprinzip aus der von einem komplexen (= zwei reellen) Parametern abhängigen *Drehungsgruppe des komplexen Kreises* (58) erhält. Ist $\Phi = \varphi + i\,\psi$ der Winkel dieser Drehung, so lautet die *Wirkung der Gruppe* $\mathfrak{B}_2$ *auf das Flächenelement* $E(x, y, z, p, q)$

$$(8,65)\quad \mathfrak{B}_2\begin{cases} X = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\,ch\,\psi + (p\cos\varphi - q\sin\varphi)\,sh\,\psi, \\ Y = (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,ch\,\psi + (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,sh\,\psi, \\ Z = \dfrac{x^2+y^2+p^2+q^2}{2}\,sh\,\psi\,ch\,\psi + (px + qy)\,sh^2\psi + \\ \qquad + \dfrac{p^2+q^2-x^2-y^2}{2}\,\psi + (qx - py)\,\varphi + z, \\ P = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\,sh\,\psi + (p\cos\varphi - q\sin\varphi)\,ch\,\psi, \\ Q = (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,sh\,\psi + (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,ch\,\psi. \end{cases}$$

Man erhält diese Formeln auch leicht, wenn man die *Wirkung der komplexen Drehung auf die* Staudtschen *Bilder* $P_l(x_l, y_l)$, $P_r(x_r, y_r)$ *eines komplexen Punktes* P *verfolgt*, und, um eine *Berührungstransformation* zu erhalten, z aus der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ bestimmt. Aus (61) und (65) folgt

Satz 63. *Den komplexen Kreisen* f *der Ebene entsprechen durch unser Übertragungsprinzip isotrope Schraubflächen* Φ *der Relativkrümmung* $K = +1$, *die bei komplexen Translationen des Kreises lediglich isotrope Grenzbewegungen erfahren, so daß es genügt, Kreise mit reeller Mitte* O *zu*

betrachten. Entsprechend dem Real- und Imaginärteil ihres Radiusquadrats $R^2 = \varrho + i\,\sigma$ *besitzen diese Schraubflächen zwei (reelle) Invarianten* ϱ, σ, *die nicht gleichzeitig verschwinden können.*

Entsprechend den von zwei reellen Parametern φ, ψ *abhängigen komplexen Drehungen des Kreises in sich vom komplexen Drehungswinkel* $\Phi = \varphi + i\,\psi$ *gestattet die Schraubfläche* Φ *eine zweigliedrige Gruppe* $\mathfrak{B}_2$ (65) *von Berührungstransformationen in sich, die sich zusammensetzt aus einer eingliedrigen Gruppe von Schraubungen vom Parameter* $-\frac{\sigma}{2}$, *welche den Drehungen des Kreises in sich um reelle Winkel* φ *entspricht, und einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen vom Parameter* ϱ, *welche den Drehungen um reinimaginäre Winkel* $i\,\psi$ *entspricht.*

Jedes der Gruppe $\mathfrak{B}_2$ (65) *unterworfene Flächenelement* $E(x, y, z, p, q)$ *erzeugt eine isotrope Schraubfläche* Φ *der Relativkrümmung* $K = +1$ *der Darstellung* (65), *die durch das Übertragungsprinzip zu einem komplexen Kreise des Radiusquadrats*

$$R^2 = \varrho + i\,\sigma = (x - iq)^2 + (y + ip)^2 \tag{8, 66}$$

gehört.

Ist dabei $\sigma = 0$, *also* R *reell oder rein imaginär, so ist die erzeugte Fläche* Φ *eine isotrope Drehfläche der Relativkrümmung* $K = +1$.

Der Fall $\varrho = 0$ wird am Schlusse (Nr. **61**) behandelt.

Dem komplexen Kreise f entspricht als Staudtsches, der Fläche Φ als parataktisches Bild die *flächentreue Verwandtschaft* (60), die — $\mathfrak{B}_2$ entsprechend — eine *zweigliedrige Gruppe* $\mathfrak{P}_2$ *von Punkttransformationen* gestattet, die aus (59) leicht zu gewinnen ist.

60. Differentialgeometrische Bemerkungen. Strukturfragen. Die Struktur der flächentreuen Abbildungen (60) hat Study[33]) eingehender behandelt. Wir wollen hier nur einige *Grundzüge* dafür der isotropen Theorie der Schraubflächen Φ (61) entnehmen. Wir berechnen zuerst deren *vier isotrope Grundformen* und finden nach Nr. **36**

$$\left\{\begin{aligned} I &= (r^2 ch^2\psi + s^2 sh^2\psi)\,d\varphi^2 - 2\,rs\,d\varphi\,d\psi + \\ &\qquad + (r^2 sh^2\psi + s^2 ch^2\psi)\,d\psi^2, \\ II &= (r^2 + s^2)\,sh\,\psi\,ch\,\psi\,(d\varphi^2 + d\psi^2), \\ III &= (r^2 sh^2\psi + s^2 ch^2\psi)\,d\varphi^2 + 2\,rs\,d\varphi\,d\psi + \\ &\qquad + (r^2 ch^2\psi + s^2 sh^2\psi)\,d\psi^2, \\ IV &= 2\,(s\,d\varphi + r\,d\psi)\,(s\,d\psi - r\,d\varphi). \end{aligned}\right. \tag{8, 67}$$

[33]) E. Study[26]), § 4.

Es ist ferner

(8, 68) $$H = \coth 2\psi, \quad K = +1$$

und daraus

(8, 69) $$\frac{1}{R_1} = \coth \psi, \quad \frac{1}{R_2} = \operatorname{th} \psi.$$

Nach der Formel (67) für die zweite Grundform II ist $M = 0$. Die φ- und ψ-Linien der Schraubfläche Φ sind also konjugiert. Da die φ-Linien auf Φ *Bahnschraublinien* sind, fallen die zur Kurve (62) kongruenten ψ-Linien mit den Fallinien von Φ zusammen.

Nach der Formel für II ist ferner die Bahnschraublinie $\psi = 0$ *singuläre Asymptotenlinie*, nämlich Rückkehrkante der Schraubfläche Φ. Sie entspricht in unserem Übertragungsprinzip jenem *Faden des komplexen Kreises f, dessen Punkte Tangenten reeller Richtung* haben. Sie wird ferner eingehüllt von den paarweise konjugiert-komplexen *regulären Asymptotenlinien* der Fläche

(8, 70) $$\varphi \pm i\,\psi = \text{const}.$$

Diese *regulären Asymptotenlinien* sind nach einem allgemeinen Satze über Schraubflächen fester Relativkrümmung[34]) selber wieder *isotrope Schraublinien der festen Torsion*

(8, 71) $$\tau = \pm i,$$

deren *Grundrisse* von konjugiert-komplexen *Kreisen* erzeugte *Schiebnetze* bilden, und durch deren *Cliffordsche Schiebung* aneinander die Schraubfläche Φ im isotropen Raume erzeugbar ist.

Das parataktische Bild des Schmiegstreifens der *Rückkehrschraublinie* besteht aus *zwei parallel bezogenen Kreisen*, den beiden *Verzweigungskreisen* der flächentreuen Verwandtschaft, deren einer sich auf einen Punkt zusammenziehen kann. Sie lauten

(8, 72) $$k_l \begin{cases} x_l = (r - s)\cos\varphi, \\ y_l = (r - s)\sin\varphi, \end{cases} \quad k_r \begin{cases} x_r = (r + s)\cos\varphi, \\ y_r = (r + s)\sin\varphi \end{cases}$$

und sind wie gesagt das *Staudtsche Bild jener Punkte des komplexen Kreises f* (58), *die reelle Tangentenrichtung haben*.

Will man die Punktverwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ *umkehrbar eindeutig* machen, so muß man jede der beiden *parataktischen Bildebenen* π_l, π_r *im Äußern ihres Verzweigungskreises* (das allein durch die Verwandtschaft bedeckt wird) *nach Art einer Riemannschen Fläche mit zwei Blättern überdecken*, welche längs dieses Verzweigungskreises (wie in einer Rückkehrkante oder Falte) zusammenhängen.

---

[34]) K. Strubecker [16 II]), Nr. 45.

Die *isotropen Krümmungslinien* der Schraubfläche Φ ergeben sich aus der Gleichung $IV = 0$ und werden daher nach (67) durch die Relationen

$$(8,73) \qquad s\varphi + r\psi = c_1 \mid r\varphi - s\psi = c_2$$

explizit dargestellt. Es genügt $c_1 = c_2 = 0$ zu wählen, also etwa

$$(8,74) \qquad \varphi = rt,\ \psi = -st \mid \varphi = st,\ \psi = rt$$

zu setzen, um eine Krümmungslinie aus jeder Schar zu erhalten, aus der alle anderen durch Schraubung entstehen.

In ähnlicher Weise können die *äquimetrischen Linien* der Schraubfläche Φ explizit bestimmt werden. Für sie ist $I - III = 0$, d. h. nach (67)

$$(8,75) \quad I - III = \big((r+s)\,d\varphi + (r-s)\,d\psi\big)\cdot\big((r-s)\,d\varphi - (r+s)\,d\psi\big) = 0$$

oder

$$(8,76) \qquad (r+s)\varphi + (r-s)\psi = c_1 \mid (r-s)\varphi - (r+s)\psi = c_2.$$

Die *äquimetrischen Linien* entstehen also durch Schraubung aus den Kurven

$$(8,77) \qquad \varphi = (s-r)t,\ \psi = (s+r)t \mid \varphi = (r+s)t,\ \psi = (r-s)t.$$

Führt man die Werte (70), (74) und (77) in die Formeln (60) ein, so erhält man der Reihe nach die (konjugiert-komplexen) *parallelbezogenen*, die *isometrischen* und die *orthogonalbezogenen Kurvennetze der* Staudtschen *Bilder des komplexen Kreises* (58). Die orthogonalbezogenen Netze werden dabei von den Hauptachsenrichtungen der Indikatrizen i_l, i_r berührt. Diese Orthogonalnetze sind *nicht isotherm* und können nach Satz 59 aufgefaßt werden als Staudtsche Bilder jener $2\cdot\infty^1$ Fäden des komplexen Kreises, deren *Linienelementquadrat* $d\sigma^2$ *rein imaginär* ist. In ähnlicher Weise hängen die Netze der *isometrischen Linien* mit den $2\cdot\infty^1$ Fäden des Kreises mit *reellem Quadrate* des Bogenelements $d\sigma$ zusammen.

Man bestätigt dies leicht an Hand der komplexen Bogenelemente des Kreises f (58) selber. Es ist nämlich

$$(8,78) \quad \begin{cases} d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = R^2\,d\Phi^2, \\ \quad = (r+is)^2\,(d\varphi + i\,d\psi)^2, \\ \quad = \big((r+s)d\varphi + (r-s)d\psi\big)\cdot\big((r-s)\,d\varphi - (r+s)\,d\psi\big) + \\ \qquad + 2i\,(s\,d\varphi + r\,d\psi)\cdot(r\,d\varphi - s\,d\psi), \\ \quad = (I - III) - i\cdot IV. \end{cases}$$

Wir wollen schließlich noch durch die Gleichung

$$(8,79)\qquad \begin{cases} \varphi = ru + sv, \\ \psi = -su + rv \end{cases}$$

auf der Fläche Φ *Krümmungsparameter* u, v einführen. Für sie ist

$$(8,80)\qquad \Phi = \varphi + i\,\psi = (r - is)\,(u + iv).$$

Die Grundformen (67) lauten jetzt

$$(8,81)\qquad \begin{cases} I = (r^2 + s^2)^2\,(ch^2\psi\,du^2 + sh^2\psi\,dv^2), \\ II = (r^2 + s^2)^2\,sh\,\psi\,ch\,\psi\,(du^2 + dv^2), \\ III = (r^2 + s^2)^2\,(sh^2\psi\,du^2 + ch^2\psi\,dv^2), \\ IV = -2\,(r^2 + s^2)^2\,du\,dv, \end{cases}$$

und man erhält für die *Bogenelemente* ds_l, ds_r *der parataktischen Bilder* Φ_l, Φ_r *der Fläche* Φ oder der *Staudtschen Bilder* f_l, f_r *des Kreises* f

$$(8,82)\qquad \begin{cases} ds_l^2 = I + III + IV = (r^2 + s^2)^2\,ch\,2\psi\left[du^2 - \dfrac{2\,du\,dv}{ch\,2\psi} + dv^2\right], \\ ds_r^2 = I + III - IV = (r^2 + s^2)^2\,ch\,2\psi\left[du^2 + \dfrac{2\,du\,dv}{ch\,2\psi} + dv^2\right]. \end{cases}$$

Die *isometrischen Richtungen* ($du = 0$, $dv = 0$) bilden in beiden Feldern *supplementäre Winkel* 2σ und $\pi - 2\sigma$, für die nach (82)

$$(8,83)\qquad \cos 2\sigma = \pm\frac{1}{ch\,2\psi}$$

oder nach (83) und (68)

$$(8,84)\qquad \sin 2\sigma = \frac{1}{H} = th\,2\psi$$

ist. Damit ist eine einfache *geometrische Deutung der mittleren Krümmung* H der Fläche Φ an Hand der parataktischen Bilder gewonnen, ebenso eine einfache *Deutung von* ψ. Nach (84) ist 2σ einfach die *Hyperbelamplitude* von 2ψ.

61. Ein Sonderfall. Von besonderem Interesse sind neben den schon ausführlicher erwähnten *Drehflächen* [mit der Invariante $\sigma = 2(py - qx) = 0$] jene besonderen *Schraubflächen* Φ *der Relativkrümmung* $K = +1$, *deren Invariante*

$$(8,85)\qquad \varrho = r^2 - s^2 = x^2 + y^2 - p^2 - q^2$$

verschwindet. Diese Schraubflächen entsprechen in unserem Übertragungsprinzip jenen *komplexen Kreisen* der Ebene, deren *Radiusquadrat rein imaginär* ist. Sie können auch erzeugt werden durch Einwirken der

Gruppe $\mathfrak{B}_2$ (65) von Berührungstransformationen auf solche Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$, für die

(8, 86) $$x^2 + y^2 = p^2 + q^2$$

ist.

Man erhält diese Kreise f und Flächen Φ sowie die besondere *flächentreue Verwandtschaft* $\Phi_l \to \Phi_r$, zu der sie Anlaß geben, wenn man in den Formeln der Nr. 59

(8, 87) $$r = s \quad | \quad r = -s$$

setzt.

Nach (72) reduziert sich in diesen Fällen der *linke* bzw. *rechte Verzweigungskreis* der Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$ auf einen *Punkt* (den Nullpunkt). Daraus folgt, daß die *Schraubfläche* Φ als *Rückkehrkante* eine *Schraublinie* der Torsion

(8, 88) $$\tau = -1 \quad | \quad \tau = +1$$

hat, die also in einem Links- bzw. Rechtsgewinde liegt.

Aus der Darstellung (76) der äquimetrischen Kurven folgt in unserem Falle

Satz 64. *Die Schraubflächen Φ der Relativkrümmung $K = +1$ mit verschwindender Invariante ϱ entsprechen durch unser Übertragungsprinzip jenen komplexen Kreisen f der Ebene, deren Radiusquadrat rein imaginär ist. Im isotropen Raume ist für sie kennzeichnend, daß sich ihre äquimetrischen Linien mit den Bahnschraublinien und den dazu konjugierten Fallinien decken. Diese Fallinien selber sind dabei algebraisch, nämlich rationale Kurven vierter Ordnung. Sie liegen auf orthogonalen* Cliffordschen *Flächen, welche längs ihnen die Schraubfläche Φ berühren.*

In der Tat lautet z. B. die zum Werte $\varphi = 0$ gehörige Fallinie

(8, 89) $$\begin{cases} x = r\,ch\,\psi, & p = r\,sh\,\psi, \\ y = \mp r\,sh\,\psi, & q = \mp r\,ch\,\psi, \\ z = r^2\,sh\,\psi\,ch\,\psi, \end{cases}$$

wobei die oberen Vorzeichen dem Falle $r = s$, die unteren dem Falle $r = -s$ entsprechen. Diese Linie ist *algebraisch*, und zwar als Durchschnitt der beiden Flächen zweiter Ordnung

(8, 90) $$\begin{cases} (\alpha) \ldots x^2 - y^2 - r^2 = 0, \\ (\beta) \ldots z \pm xy = 0 \end{cases}$$

rational und von der vierten Ordnung, und ihr Berührungsstreifen (89) längs Φ ist auch der *orthogonalen* Cliffordschen *Fläche* (β) *der Relativkrümmung* $K = -1$ umschrieben (deren parataktisches Bild aus zwei *orthogonalen Geraden* besteht).

Es folgt daraus

Satz 65. *Das parataktische Bild der Schraubfläche Φ mit verschwindender Invariante ϱ ist eine flächentreue Verwandtschaft $\Phi_l \to \Phi_r$, deren zugeordnete Orthogonalnetze erstens aus je einer Schar konzentrischer Kreise bestehen, die durch orthogonale Tangenten aufeinander bezogen sind, und die den (äquimetrischen) Bahnschraublinien der Fläche Φ entsprechen, und die zweitens aus den dazu normalen Scharen der Durchmesser dieser Kreise bestehen, welche den (gleichfalls äquimetrischen) Fallinien der Fläche Φ entsprechen, und die ebenfalls orthogonal gepaart sind. Der singulären Bahnschraublinie (Rückkehrkante) der Fläche Φ entspricht dabei im einen Bildfelde ein Verzweigungskreis, im anderen Felde ein Verzweigungspunkt.*

(Eingegangen am 23. September 1943.)

Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben.

Von

Helmut Wielandt, z. Zt. in Göttingen.

(Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., Institut für instationäre Vorgänge.)

Inhalt: Das bekannte Iterationsverfahren für selbstadjungierte Aufgaben wird auf nicht selbstadjungierte übertragen. Es konvergiert im wesentlichen dann und nur dann, wenn Eigenwerte existieren. Bei der Bestimmung jedes höheren Eigenwertes bleibt ein Orthogonalisierungsprozeß frei wählbar.

Gliederung.

1. Einleitung und Übersicht 93
2. Hauptlösungen 99
3. Der Abänderungssatz 103
4. Der Konvergenzsatz 114
5. Das Iterationsverfahren 131
6. Schrifttum 143

1. Einleitung und Übersicht.

1 A. *Allgemeines über lineare Eigenwertaufgaben.* Die überwiegende Mehrzahl der in Physik und Technik auftretenden linearen Eigenwertaufgaben zeichnet sich durch Existenz und Realität der Eigenwerte sowie durch Orthogonalität der Eigenlösungen aus. Zur praktischen Lösung dieser Aufgaben, namentlich bei Differentialgleichungen, sind verschiedene Verfahren entwickelt, in zahlreichen Arbeiten untersucht und in zusammenfassenden Berichten dargestellt worden (Schrifttumsverzeichnis [1], [2], [3]).

In den letzten Jahren haben neben diesen sogenannten selbstadjungierten Aufgaben, deren genauere Abgrenzung für die vorliegende Arbeit ohne Belang ist, auch allgemeinere Aufgaben erhebliche Bedeutung für die Technik gewonnen. Man hat derartige Rechnungen zunächst durch formale Anwendung einzelner klassischer Methoden erledigen können. Bald aber stieß man auf ungewohnte Konvergenzverhältnisse, und es machte sich ein Mangel an Abschätzungen und Einschließungssätzen für die Eigenwerte bemerkbar.

Die rechnerischen Schwierigkeiten rühren vorwiegend von der Tatsache her, daß die Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten nicht mehr ortho-

gonal zu sein brauchen, sondern mit beliebiger Annäherung linear abhängig werden können. (Beispiel: Die nicht selbstadjungiert zu nennende Aufgabe

$$y^{IV} + y = \lambda \left[\left(\frac{9}{\varepsilon} e^{-ix} - 34 \right) y' \right]', \quad y^{(\nu)}(0) = y^{(\nu)}(2\pi) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3$$

besitzt die für kleine Werte der Konstanten ε nahezu gleichen Eigenfunktionen $y_1 = e^{ix}$ und $y_2 = e^{ix} + \varepsilon e^{2ix}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1/17$ und $\lambda_2 = 1/8$.) Für die Theorie liegt eine Schwierigkeit darin, daß es Aufgaben ohne jeden Eigenwert gibt, wie

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 0,$$

so daß man nicht auf Entwicklungssätze rechnen kann.

Allgemeine Untersuchungen über die praktische Lösung nicht selbstadjungierter Aufgaben scheinen bisher kaum vorzuliegen [1]). Was die Verallgemeinerung der Sturm-Liouvilleschen Theorie bisher erbracht hat, sind Aussagen über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte sowie Entwicklungssätze ([1], B § 1, 2. 4—2. 5), die aber noch an besondere Realitätsvoraussetzungen geknüpft sind und z. B. auf die praktisch vorkommende Eigenwertaufgabe

$$y''(x) = \lambda g(x) y(x), \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{1. 1}$$

mit komplexwertigem stetigem $g(x)$ nicht anwendbar sind. Auch der Zusammenhang mit der Variationsrechnung, der sich für die numerische Bestimmung reeller Eigenwerte als so nützlich erwiesen hat, wird sich nicht leicht verallgemeinern lassen. Dagegen verspricht die Methode der Integralgleichungen greifbare Ergebnisse. Mit ihr findet man auch Anschluß an die Matrizentheorie, in der ja die entsprechenden algebraischen Fragen mit Hilfe der Elementarteilertheorie weitgehend beantwortet werden können. Diesen Weg wird im folgenden zur Untersuchung des Iterationsverfahrens eingeschlagen. Es ergibt sich, daß das im folgenden Abschnitt beschriebene bekannte Verfahren auf diejenigen Eigenwertaufgaben übertragen werden kann, bei denen der Eigenwert nur linear auftritt, seien es algebraische, Differential- oder Integralgleichungen.

1 B. *Das Iterationsverfahren bei selbstadjungierten Aufgaben.* Der Grundgedanke des Verfahrens werde am Beispiel einer linearen homogenen reellen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x) y = \lambda b(x) y$$

---

[1]) Herrn Lösch verdanke ich die freundliche Mitteilung, daß eine Untersuchung von ihm zur Übertragung des Grammelschen Verfahrens auf Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern im Druck ist [11].

mit von λ freien, linearen homogenen Randbedingungen $\mathfrak{R}[y] = 0$ erläutert ($0 \leqq x \leqq 1$). Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung mit $\mathfrak{A}[y]$. Man bildet mit einer beliebigen Ausgangsfunktion $y_1^{(0)}(x)$ die Funktionenfolge $y_1^{(\nu)}(x)$ nach der Vorschrift

$$\mathfrak{A}[y_1^{(\nu)}] = b(x)\, y_1^{(\nu-1)}, \quad \mathfrak{R}[y_1^{(\nu)}] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Unter gewissen Bedingungen (vgl. z. B. [1] B § 1, 3. 4), von denen die Selbstadjungiertheit die wichtigste ist, kann man nachweisen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y_1^{(\nu-1)}(x)}{y_1^{(\nu)}(x)} = \lambda, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{y_1^{(\nu)}(x)}{y_1^{(\nu)}(x_0)} = e(x)$$

existieren, wobei λ ein Eigenwert, $e(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion und x_0 eine feste Stelle des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ ist. Hierbei ergibt sich im allgemeinen die Eigenfunktion $e_1(x)$ zum absolut kleinsten Eigenwert λ_1, nämlich dann, wenn $y_1^{(0)}(x)$ zu $e_1(x)$ nicht orthogonal ist:

$$\int_0^1 y_1^{(0)}(\xi)\, e_1(\xi)\, d\xi \neq 0.$$

Um eine Eigenfunktion zum s-ten Eigenwert λ_s zu finden, hat man dasselbe Verfahren auf irgendeine Ausgangsfunktion $y_s^{(0)}(x)$ anzuwenden, welche zwar zu den als bekannt vorausgesetzten $(s-1)$ ersten Eigenfunktionen $e_1(x), \ldots, e_{s-1}(x)$ orthogonal ist, aber nicht zu $e_s(x)$. Bei der Zahlenrechnung pflegt man, da die Orthogonalität nicht exakt zu erreichen ist, vor jedem Iterationsschritt von neuem zu $e_1(x), \ldots, e_{s-1}(x)$ zu orthogonalisieren.

Ein entsprechendes Verfahren hat man für Integralgleichungen mit hermiteschem, z. B. reellem symmetrischem Kern ([5], S. 127).

1 C. *Das Iterationsverfahren bei algebraischen Aufgaben.* Als Vorbild für die geplante Übertragung auf nicht selbstadjungierte Aufgaben soll das folgende Verfahren zur Lösung algebraischer Eigenwertaufgaben dienen ([6], 4. 18). Die Aufgabe laute:

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} y_\beta = \varkappa\, y_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

oder kurz $Ay = \varkappa y$, unter Benutzung der Matrizenschreibweise (A eine gegebene quadratische n-reihige Matrix, y eine gesuchte einspaltige Matrix, $\varkappa$ der gesuchte Eigenwert). Man setzt, von einer beliebigen Spalte $y^{(0)}$ von n komplexen Zahlen ausgehend,

$$y^{(\nu)} = A y^{(\nu-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Dann konvergiert im allgemeinen $y^{(\nu)}$ mit wachsendem ν bis auf Proportionalität gegen eine Spalte $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, welche eine Eigenlösung zu dem absolut größten Eigenwert $\varkappa_1$ ist. Mit e ist auch $\varkappa_1$ bekannt. Bestimmt man sodann die Zeile $z = (z_1, \ldots, z_n)$ so, daß in der abgeänderten Matrix

$$A - ez = \begin{pmatrix} a_{11} - e_1 z_1 & a_{12} - e_1 z_2 & \ldots & a_{1n} - e_1 z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - e_n z_1 & a_{n2} - e_n z_2 & \ldots & a_{nn} - e_n z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ & & B & \end{pmatrix}$$

die erste Zeile aus lauter Nullen besteht, so besitzt die $(n-1)$-reihige Teilmatrix B dieselben Eigenwerte wie A, mit Ausnahme von $\varkappa_1$. Daher kann der zweitgrößte Eigenwert $\varkappa_2$ von A durch Anwendung desselben Verfahrens auf B gewonnen werden. Den drittgrößten Eigenwert $\varkappa_3$ von A erhält man, indem man B durch eine entsprechende Abänderung des Eigenwertes $\varkappa_2$ beraubt, usw. (Genaue Formulierung und Beweis folgen unter 3 Da und 4 A d.)

1 D. *Inhaltsübersicht.* Zuerst wird das eben beschriebene Abänderungsverfahren $A \to B$ in einer viel allgemeineren, für jeden linearen Operator gültigen Fassung bewiesen. Es handelt sich um einfache algebraische Betrachtungen, bei denen weder Grenzprozesse noch Größenabschätzungen eine Rolle spielen. Um diesen Umstand nicht durch irgendeine besondere und außerdem unübersichtliche Darstellung des zugrunde liegenden Operators zu verdecken, wird der Beweis abstrakt durchgeführt (Abschnitt 3); die dazu notwendigen Definitionen, insbesondere der zwar nicht neue, aber doch nicht allgemein bekannte Begriff der Hauptlösung (eine Verallgemeinerung der Eigenlösung; vgl. [4], S. 1546), werden vorweg in Abschnitt 2 zusammengestellt. In Abschnitt 4 werden die Konvergenztatsachen hergeleitet, auf denen die Berechnung des ersten Eigenwertes nach dem Iterationsverfahren beruht. Die Gültigkeit des Konvergenzsatzes wird in schrittweise zunehmendem Umfang nachgewiesen, schließlich für Systeme von gemischten Integralgleichungen; deren Eigenwerttheorie wird zuvor unter 4 C entwickelt. In Abschnitt 5 werden Abänderungs- und Konvergenzsatz zum Iterationsverfahren für Systeme gemischter Integralgleichungen zusammengefaßt. Als Folge ergibt sich die Gültigkeit des Iterationsverfahrens für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Als Beispiel soll ein Sonderfall mit vereinfachenden Voraussetzungen angeführt werden:

$$\mathfrak{A}[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)\, y \qquad (n \geqq 1)$$

$$\mathfrak{B}[y] \equiv \qquad b_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_0(x)\, y$$

seien Differentialoperatoren mit stetigen, reellen oder komplexen Koeffizienten ($0 \leqq x \leqq 1$). Ferner seien $\mathfrak{r}_\alpha[y]$, $\mathfrak{s}_\alpha[y]$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) Linearformen in den Randwerten von y und seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen, mit konstanten Koeffizienten. Die homogene Randwertaufgabe

$$\mathfrak{A}[y] = 0, \quad \mathfrak{r}_\alpha[y] = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

habe keine n-mal stetig differenzierbare Lösung außer $y(x) \equiv 0$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ die s dem Betrage nach kleinsten Eigenwerte der Aufgabe

$$\mathfrak{A}[y] = \lambda \mathfrak{B}[y], \quad \mathfrak{r}_\alpha[y] = \lambda \mathfrak{s}_\alpha[y] \qquad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Ihre Ordnung (im Sinne von 5 B) sei 1, und es sei $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_s|$. Schließlich sei x_0 eine Stelle, an der die zugehörigen Eigenfunktionen $e_1(x)$, $\ldots, e_s(x)$ von Null verschieden sind, also auf $e_\sigma(x_0) = 1$ normiert werden können.

Man bilde für eine beliebige $(n-1)$-mal stetig differenzierbare Ausgangsfunktion $y_1^{(0)}(x)$, an welcher λ_1 im Sinne von 5 B beteiligt ist, die Iterationsfolge $y_1^{(\nu)}(x)$ nach der Vorschrift

$$\mathfrak{A}[y_1^{(\nu)}] = \mathfrak{B}[y_1^{(\nu-1)}], \quad \mathfrak{r}_\alpha[y_1^{(\nu)}] = \mathfrak{s}_\alpha[y_1^{(\nu-1)}] \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y_1^{(\nu-1)}(x_0)}{y_1^{(\nu)}(x_0)} = \lambda_1, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{y_1^{(\nu)}(x)}{y_1^{(\nu)}(x_0)} = f_1(x).$$

Weiter bestimme man nach der folgenden Regel der Reihe nach die Eigenwerte λ_σ und die Funktionen $f_\sigma(x)$ für $\sigma = 2, 3, \ldots, s$: Mit irgendeiner Ausgangsfunktion $y_\sigma^{(0)}(x)$, an welcher λ_σ beteiligt ist, werden nach der Iterationsvorschrift

$$\mathfrak{A}[y_\sigma^{(\nu)}] = \mathfrak{B}[z_\sigma^{(\nu-1)}], \quad \mathfrak{r}_\alpha[y_\sigma^{(\nu)}] = \mathfrak{s}_\alpha[z_\sigma^{(\nu-1)}] \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

mit

$$z_\sigma^{(\nu-1)}(x) = y_\sigma^{(\nu-1)}(x) - y_\sigma^{(\nu-1)}(x_0) f_{\sigma-1}(x)$$

die Funktionen $y_\sigma^{(\nu)}(x)$ und aus ihnen die Grenzwerte

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y_\sigma^{(\nu-1)}(x_0)}{y_\sigma^{(\nu)}(x_0)} = \lambda_\sigma, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{y_\sigma^{(\nu)}(x)}{y_\sigma^{(\nu)}(x_0)} = f_\sigma(x)$$

gebildet. Die von x abhängigen Grenzwerte existieren gleichmäßig. Die Eigenfunktionen e_σ erhält man durch

$$e_1 = f_1$$

$$e_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f_1 + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) f_2$$

$$e_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} f_1 + \left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} f_2 + \left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) f_3$$

. . . . . .

$$e_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_1} f_1 + \sum_{\sigma=2}^{s} \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_{\sigma-1}}\right) \frac{\lambda_s}{\lambda_\sigma} f_\sigma .$$

Gibt es keinen $(s+1)$-ten Eigenwert, so hat die zur Berechnung von λ_{s+1} angesetzte Quotientenfolge $y_{s+1}^{(\nu-1)}(x_0)/y_{s+1}^{(\nu)}(x_0)$ keinen endlichen Grenzwert, wie man auch die Stelle x_0 und die Ausgangsfunktion $y_{s+1}^{(0)}(x)$ wählen mag.

Wie dieser Satz zeigt, kann bei der Berechnung des σ-ten Eigenwertes die einfache Ersetzungsvorschrift

$$y(x) \to y(x) - y(x_0) f_{\sigma-1}(x)$$

an die Stelle der unter 1 B erwähnten Orthogonalisierung von y zu $e_1, \ldots, e_{\sigma-1}$ treten. Hinsichtlich der Genauigkeit sind allerdings andere Vorschriften vorteilhafter (vgl. 5 Ca).

Die Frage, unter welchen Umständen jeder einzelne Iterationsschritt die Näherung für die Eigenfunktion verbessert, wird an einem typischen Beispiel in 4 Db untersucht, der Fall schlechter Konvergenz in 4 Dc, f.

1 E. *Bezeichnungen.* Unter Orthogonalität wird im folgenden bei komplexen Funktionen $f(x)$, $g(x)$ die Beziehung $\int \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = 0$ verstanden, wobei der Querstrich den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl andeutet. Diese Definition ist in der Theorie der Integralgleichungen üblich und auch den Belangen des numerischen Rechnens angemessen; sie bürgt für wesentliche Verschiedenheit von f und g. Die Veränderlichen x, ξ sind reell und stets auf das Intervall $0 \leqq x, \xi \leqq 1$ beschränkt; Integrale ohne Angabe der Grenzen sind von 0 bis 1 zu erstrecken. Alle übrigen Unbestimmten dürfen komplex sein. Obere Indizes, wie in $y^{(\nu)}$, bedeuten nicht Ableitungen, sondern Iterierte. Abbildungen einer Menge in sich oder in eine andere Menge werden durch Frakturbuchstaben bezeichnet, wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{r}$. Ihr Argument steht rechts daneben; entbehrliche Klammern werden fortgelassen, wie in $\mathfrak{r}\,\mathfrak{A}\,y = \mathfrak{r}\left[\mathfrak{A}[y]\right]$. Die einspaltige Matrix mit den Elementen $y_1, \ldots, y_n$ wird zur Raumersparnis durch $\{y_1, \ldots, y_n\}$ mit geschweiften Klammern bezeichnet.

2. Hauptlösungen.

2 A. *Definitionen.* Wir betrachten zunächst Eigenwertprobleme der Gestalt

$$\mathfrak{K} y = \varkappa y. \tag{2. 1}$$

Dabei soll y irgendeiner linearen Gesamtheit Y angehören; d. h. in Y soll zu je zwei Elementen y_1, y_2 und je zwei komplexen Zahlen c_1, c_2 ein drittes als „Summe" $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ erklärt sein, derart, daß die üblichen Rechenregeln gelten ([9], S. 6). $\mathfrak{K}$ bedeutet eine Abbildung von Y auf einen Teil von sich mit der Linearitätseigenschaft

$$\mathfrak{K}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathfrak{K} y_1 + c_2 \mathfrak{K} y_2.$$

Y und $\mathfrak{K}$ sind gegeben, y und die komplexe Zahl $\varkappa$ sind gesucht (Beispiele folgen unter 2 B).

Summe und Produkt zweier Abbildungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von Y in sich werden erklärt durch

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) y = \mathfrak{A} y + \mathfrak{B} y, \qquad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) y = \mathfrak{A}(\mathfrak{B} y),$$

Potenzen durch wiederholte Produktbildung. Nun definieren wir (im Anschluß an [8], S. 241): Jedes Element h aus Y, das mindestens eine Gleichung der Gestalt

$$(\mathfrak{K} - \varkappa)^r h = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{2. 2}$$

befriedigt, heißt eine Hauptlösung von $\mathfrak{K}$ zu $\varkappa$. Die kleinste Zahl r, für welche (2. 2) gilt, nennen wir die Stufe von h, falls $h \neq 0$; unter der Stufe von $h = 0$ verstehen wir 0. Die Hauptlösungen der Stufe 1 sind die „Eigenlösungen", $\varkappa$ ist der zugehörige „Eigenwert".

Jede Summe $c_1 h_1 + c_2 h_2$ zweier Hauptlösungen zur selben Zahl $\varkappa$ ist wieder eine. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Hauptlösungen zu $\varkappa$ heißt die Ordnung von $\varkappa$ für $\mathfrak{K}$. Es ist $0 \leqq Ord_{\mathfrak{K}} \varkappa \leqq \infty$. Die Eigenwerte sind durch $Ord_{\mathfrak{K}} \varkappa \geqq 1$ gekennzeichnet. (Die „Vielfachheit eines Eigenwertes", definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenlösungen, spielt im folgenden keine Rolle.)

Wie der Abänderungssatz zeigen wird, liefert das Iterationsverfahren nicht eigentlich die Eigenlösungen, sondern die Hauptlösungen. Die Eigenwerte ergeben sich so oft, als ihre Ordnung angibt, nicht ihre Vielfachheit. Vom Standpunkt der Anwendungen aus werden die Hauptlösungen zunächst als Ballast erscheinen, da man gewöhnlich nur die Eigenlösungen physikalisch deutet. Doch wird man zur Betrachtung der Hauptlösungen gezwungen, wenn man die Lösung der Eigenwertaufgabe stetig von den Vorgaben abhängen lassen will. So kann die Summe der Vielfachheiten der Eigenwerte, die in

einem festen Kreis $|\varkappa| \leqq R$ liegen, bei stetiger Änderung der Vorgaben springen, ohne daß ein Eigenwert die Grenze $|\varkappa| = R$ überschreitet, z. B. indem zwei Eigenwerte samt ihren Eigenlösungen zusammenfallen. Aber die Summe der Ordnungen bleibt konstant, solange kein Eigenwert die Grenze überschreitet. Rücken zwei Eigenlösungen zusammen, so entsteht an Stelle der verlorengehenden Eigenlösung durch Grenzübergang eine Hauptlösung; vgl. Beispiel 2 Ba.

Man weiß vom Iterationsverfahren für selbstadjungierte Aufgaben her, daß die erhaltene Eigenfunktion davon abhängt, welche Eigenwerte an der Ausgangsfunktion „beteiligt" sind. Dieser Begriff läßt sich für den vorliegenden Zweck folgendermaßen fassen:

Die komplexe Zahl $\varkappa$ heißt hinsichtlich $\mathfrak{K}$ an dem Element y aus Y unbeteiligt, wenn jede Gleichung

$$(\mathfrak{K} - \varkappa)^s z_s = y \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

mindestens eine Lösung z_s aus Y besitzt; andernfalls heißt $\varkappa$ an y beteiligt. Es gelten die folgenden Regeln:

(2.4). *Ist $\varkappa$ an y_1 und y_2 unbeteiligt, so auch an jeder Summe $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.* Zum Beweis setze man $z_s = c_1 z_{1s} + c_2 z_{2s}$.

(2.5). *Ist $\varkappa \neq \varkappa'$, so ist $\varkappa$ an y und an $(\mathfrak{K} - \varkappa')\, y$ gleichzeitig beteiligt oder unbeteiligt.* Ist nämlich $\varkappa$ an y unbeteiligt, also (2.3) lösbar, so ist $(\mathfrak{K} - \varkappa')\, z_s$ eine Lösung der entsprechenden Gleichung mit der rechten Seite $(\mathfrak{K} - \varkappa')\, y$; ist umgekehrt $\varkappa$ an $(\mathfrak{K} - \varkappa')\, y$ unbeteiligt, also

$$(\mathfrak{K} - \varkappa)^s z_s' = (\mathfrak{K} - \varkappa')\, y$$

lösbar, so bestimme man das Polynom $p(x)$ derart, daß

$$1 = (\varkappa' - \varkappa)^{-s} (x - \varkappa)^s + p(x) \cdot (x - \varkappa') \tag{2.6}$$

ist, setze in (2.6) $\mathfrak{K}$ statt x und wende den entstehenden Operator auf y an. Es wird

$$y = (\varkappa' - \varkappa)^{-s} (\mathfrak{K} - \varkappa)^s y + p(\mathfrak{K})(\mathfrak{K} - \varkappa')\, y,$$

also wird (2.3) gelöst durch

$$z_s = (\varkappa' - \varkappa)^{-s} y + p(\mathfrak{K})\, z_s'.$$

(2.7). *Ist $y \neq 0$ Hauptlösung von $\mathfrak{K}$ zu einem Eigenwert $\varkappa$ endlicher Ordnung, so ist $\varkappa$ und nur $\varkappa$ an y beteiligt.* Wäre nämlich $\varkappa$ unbeteiligt, so wären offensichtlich die Lösungen z_s von (2.3) unendlich viele voneinander linear unabhängige Hauptlösungen von $\mathfrak{K}$ zu $\varkappa$. Wäre andererseits $\varkappa' \neq \varkappa$ an y beteiligt, so wäre $\varkappa'$ nach (2.5) auch an $(\mathfrak{K} - \varkappa)^r y$ beteiligt, was aber für genügend große r nach (2.2) nicht zutrifft; denn an $y = 0$ ist jedes $\varkappa'$ unbeteiligt.

Bei den in den Anwendungen gewöhnlich auftretenden Eigenwertaufgaben ist jede Zahl $\varkappa$, die an einem Element beteiligt ist, Eigenwert. Bei anderen Aufgaben gibt es Gegenbeispiele. Ist z. B. Y die Gesamtheit der Vektoren $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ mit unendlich vielen Komponenten, und ist $\mathfrak{R}\, y = \{0, y_1, y_2, \ldots\}$, so ist $\varkappa = 0$ an jedem Element $y \neq 0$ beteiligt, aber $\mathfrak{R}$ besitzt keinen Eigenwert.

2 B. *Beispiele.* (a) Y = Gesamtheit der „Vektoren" $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ mit n komplexen Zahlen y_α als Komponenten und mit der Additionsvorschrift $(cy + c'y')_\alpha = cy_\alpha + c'y'_\alpha$. $\mathfrak{R}$ sei eine lineare Substitution mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{\alpha\beta})$:

$$(\mathfrak{R}\, y)_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, y_\beta$$

oder kurz $\mathfrak{R}y = Ay$ im Sinne der Matrizenmultiplikation.

Hauptlösungen zu $\varkappa$ sind die Vektoren, die einer Gleichung $(A - \varkappa E)^r y = 0$ genügen (E = Einheitsmatrix). Die Ordnung von $\varkappa$ ist die Vielfachheit von $\varkappa$ als Wurzel der Säkulargleichung $|A - \varkappa E| = 0$. Es ist $\sum Ord\, \varkappa = n$; alle Ordnungen sind endlich, und es gibt höchstens n Eigenwerte. Ist $\varkappa$ an einem Vektor beteiligt, so ist $\varkappa$ Eigenwert.

Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} i & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\varkappa_1 = i$ mit $Ord_{\mathfrak{R}}\, i = 1$ und $\varkappa_2 = 1$ mit $Ord_{\mathfrak{R}}\, 1 = 2$. Die bis auf Proportionalität einzigen Eigenvektoren sind $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{5, 1 - i, 0\}$; eine von e_2 linear unabhängige Hauptlösung der Stufe 2 zu $\varkappa_2$ ist $h_2 = \{15, 0, 2i\}$. Wir verfolgen das Entstehen von h_2 aus zwei zusammenrückenden Eigenlösungen der geringfügig geänderten Matrix

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} i & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}; \quad A(0) = A.$$

$A(\varepsilon)$ hat, außer dem Eigenwert $\varkappa_1 = i$, die Eigenwerte $\varkappa_2 = 1$ und $\varkappa_3(\varepsilon) = 1 + \varepsilon$ mit den Eigenvektoren

$$e_2 = \{5, 1 - i, 0\}, \quad e_3(\varepsilon) = \left\{5 - \frac{5\varepsilon}{1 - i + \varepsilon},\ 1 - i,\ \frac{\varepsilon}{3}(1 - i)\right\}.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $e_2 - e_3(\varepsilon) \to 0$. Dividiert man jedoch vorher durch ε, so erhält man

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e_2 - e_3(\varepsilon)}{\varepsilon} = \left\{\frac{5}{1 - i},\ 0,\ \frac{i - 1}{3}\right\} = \frac{1}{3(1 - i)}\, h_2.$$

Jede andere Hauptlösung $h_2' = c_1 h_2 + c_2 e_2$ läßt sich ähnlich erhalten, indem man e_2 und $e_3(\varepsilon)$ anders normiert.

Beispiel (2 Bb). Y = Gesamtheit der für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen komplexwertigen Funktionen $y(x)$; $\mathfrak{K}$ = Integraloperator mit dem in $0 \leqq x, \xi \leqq 1$ stetigen Kern $K(x, \xi)$:

$$\mathfrak{K} y = \int_0^1 K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Eine Zahl $\varkappa$ ist Eigenwert von $\mathfrak{K}$, wenn $\int K(x, \xi)\, e(\xi)\, d\xi = \varkappa e(x)$ eine stetige Lösung $e(x) \not\equiv 0$ besitzt. Die Eigenwerte $\varkappa \neq 0$ sind also die Kehrwerte $\varkappa = \lambda^{-1}$ der Eigenwerte des Kerns $K(x, \xi)$, die ja in der Theorie der Integralgleichungen durch

$$e(x) - \lambda \int_0^1 K(x,\xi)\, e(\xi)\, d\xi = 0 \tag{2.8}$$

definiert werden. Sie haben nach der Fredholmschen Theorie stets eine endliche Ordnung, nämlich die Ordnung von λ als Nullstelle der Fredholmschen Determinante des Kerns $\lambda K(x, \xi)$, einer ganzen transzendenten Funktion von λ (vgl. [4], S. 1547). Die Eigenwerte $\varkappa$ sind daher dem Betrage nach beschränkt und haben höchstens den einen Häufungspunkt $\varkappa = 0$. Ist $\varkappa = 0$ selbst Eigenwert, so kann seine Ordnung endlich oder unendlich sein; das letztere tritt z. B. für $K(x, \xi) \equiv 1$ ein, wo jedes y mit $\int y(\xi)\, d\xi = 0$ Eigenlösung ist. Es gibt Integraloperatoren, die im Sinne von 2 A überhaupt keinen Eigenwert haben, z. B.

$$\mathfrak{K} y = \int_0^x (x - \xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Die Hauptlösungen h der Stufe $r = 2$ sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft

$$\int_0^1 K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi = \varkappa h(x) + e(x),$$

wobei $e(x)$ der Gleichung (2. 8) genügt.

Beispiel (2 Bc). Um die Aufgabe (1. 1) auf die Form (2. 1) zu bringen, verstehen wir unter Y die Gesamtheit der für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktionen $y(x)$. Unter $\mathfrak{K} y$ verstehen wir die eindeutig bestimmte Lösung $z = z(x)$ von

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = g(x)\, y(x), \quad z(0) = z(1) = 0.$$

Für die Eigenlösungen $e(x)$ von $\mathfrak{K}$ zu Eigenwerten $\varkappa \neq 0$ gilt

$$g(x)\, e(x) = \varkappa e''(x), \quad e(0) = e(1) = 0.$$

Die Kehrwerte $\lambda = \varkappa^{-1}$ sind die Eigenwerte von (1. 1). Die Hauptlösungen h der Stufe zwei sind gekennzeichnet durch

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \lambda g(x)\{h(x) + e(x)\}, \quad h(0) = h(1) = 0$$

mit einer Eigenlösung $e(x)$. Bedeutet $G(x, \xi)$ die zu $y''(x)$, $y(0)$, $y(1)$ gehörige Greensche Funktion, so ist $Ord_{\mathfrak{K}} \varkappa$ die Ordnung von $\lambda = \varkappa^{-1}$ als Nullstelle der Fredholmschen Determinante $D(\lambda)$ von $\lambda G(x, \xi)\, g(\xi)$. Ohne die Greensche Funktion heranzuziehen, kann man, wie ohne Beweis vermerkt sei, $D(\lambda)$ folgendermaßen bestimmen: Es sei $y(x) = y(x, \lambda)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y''(x) = \lambda g(x) y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Dann ist $D(\lambda) = y(1, \lambda)$.

$\varkappa = 0$ ist Eigenwert, wenn $g(x)$ in einem ganzen Teilintervall identisch verschwindet. Die zugehörigen Eigenlösungen $e(x)$ sind gekennzeichnet durch $g(x) \cdot e(x) \equiv 0$, Hauptlösungen höherer Stufe gibt es nicht.

Der naheliegende Ansatz, die Aufgabe (1. 1) als Eigenwertproblem des Operators

$$\mathfrak{L} y = \frac{1}{g(x)} y''(x)$$

im Raum Y der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $y(x)$ mit $y(0) = y(1) = 0$ zu formulieren, scheitert daran, daß im allgemeinen $\mathfrak{L} y$ dem Raum Y nicht mehr angehört.

3. Der Abänderungssatz.

3 A. *Wortlaut.* $\mathfrak{K}$ sei, wie in 2 A, eine lineare Abbildung des Raumes Y in sich. $\varkappa_1 \neq 0$ sei Eigenwert von $\mathfrak{K}$ und e_1 eine zugehörige Eigenlösung:

$$\mathfrak{K} e_1 = \varkappa_1 e_1. \tag{3. 1}$$

$\mathfrak{g} y$ sei ein lineares Funktional der y aus Y, d. h. eine von y abhängige komplexe Zahl mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{g}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathfrak{g} y_1 + c_2 \mathfrak{g} y_2$$

für je zwei y_1, y_2 aus Y und komplexe Zahlen c_1, c_2 (Beispiele folgen in Abschnitt 3 D).

Es sei $\mathfrak{g} e_1 = 1$. Der „Orthogonalisierungsprozeß“ $\mathfrak{O}$ werde für alle y aus Y durch

$$\mathfrak{O} y = y - (\mathfrak{g} y) e_1 = (1 - e_1 \mathfrak{g}) y$$

erklärt. (Die Bezeichnung rechtfertigt sich dadurch, daß $\mathfrak{g} \mathfrak{O} y \equiv 0$ ist, daß also, wenn Y ein Vektorraum und $\mathfrak{g} y$ das innere Produkt $\sum \bar{g}_\alpha y_\alpha$ von y mit einem Vektor g ist, alle $\mathfrak{O} y$ zu g orthogonal sind.) Man ändere die Abbildung $\mathfrak{K}$

durch Vorschalten des Orthogonalisierungsprozesses $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{R}^*$ ab, setze also für alle y aus Y

$$\mathfrak{R}^* y = \mathfrak{R}\,\mathfrak{O} y.$$

Dann gilt der

Abänderungssatz: *Es ist*

$$Ord_{\mathfrak{R}^*} \varkappa = \begin{cases} Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa & \text{für } \varkappa(\varkappa - \varkappa_1) \neq 0 \\ Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa - 1 & \text{für } \varkappa = \varkappa_1 \\ Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa + 1 & \text{für } \varkappa = 0. \end{cases}$$

Man erhält genau alle Hauptlösungen h^* von $\mathfrak{R}^*$ aus den Hauptlösungen h von $\mathfrak{R}$ zu demselben $\varkappa$ durch die Formeln

$$h^* = \begin{cases} \mathfrak{R}^* h & \text{für } \varkappa \neq 0 \\ h + c e_1 & \text{für } \varkappa = 0 \ (c = \text{beliebige Zahl}) \end{cases}$$

und genau alle h durch

$$h = \begin{cases} (\mathfrak{R} - \varkappa_1) h^* & \text{für } \varkappa \neq \varkappa_1 \\ h^* + c e_1 & \text{für } \varkappa = \varkappa_1 \ (c \text{ beliebig}). \end{cases}$$

Ist $\varkappa(\varkappa - \varkappa_1) \neq 0$, so sind die angegebenen Zuordnungen $h \rightleftarrows h^*$ beide eindeutig umkehrbar und lassen die Stufe von h ungeändert, und $\varkappa$ ist an einem beliebigen Element y aus Y dann und nur dann hinsichtlich $\mathfrak{R}^*$ beteiligt, wenn $\varkappa$ an y hinsichtlich $\mathfrak{R}$ beteiligt ist.

3 B. *Beweis.* (a) Es ist

$$\mathfrak{O} y = 0 \quad \text{nur für} \quad y = c e_1 \tag{3.2}$$

mit beliebigem komplexem c. Ist nun $p(x)$ ein Polynom in einer Unbestimmten mit komplexen Koeffizienten, so unterscheidet sich $p(\mathfrak{R}^*) y$ von $p(\mathfrak{R}) y$ nur um einen Summanden der Gestalt $c e_1$, also gilt

$$\mathfrak{O}\, p(\mathfrak{R}^*) = \mathfrak{O}\, p(\mathfrak{R}), \tag{3.3}$$

$$(\mathfrak{R} - \varkappa_1)\, p(\mathfrak{R}^*) = (\mathfrak{R} - \varkappa_1)\, p(\mathfrak{R}). \tag{3.4}$$

Ferner ist nach (3. 1)

$$p(\mathfrak{R})\, e_1 = p(\varkappa_1)\, e_1. \tag{3.5}$$

(3 Bb). Es sei $\varkappa \neq \varkappa_1$. Ist h eine Hauptlösung der Stufe r von $\mathfrak{R}$ zu $\varkappa$, gilt also

$$(\mathfrak{R} - \varkappa)^r h = 0, \tag{3.6}$$

so folgt nach (3. 3)

$$0 = \mathfrak{R}\,\mathfrak{O}(\mathfrak{R} - \varkappa)^r h = \mathfrak{R}\,\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^* - \varkappa)^r h = (\mathfrak{R}^* - \varkappa)^r \mathfrak{R}^* h, \tag{3.7}$$

d. h. das Element

$$\mathfrak{R}^* h = h_1^* \tag{3.8}$$

ist Hauptlösung von $\mathfrak{R}^*$ zu $\varkappa$, höchstens von der Stufe r. Ist umgekehrt h^* irgendeine Hauptlösung der Stufe s von $\mathfrak{R}^*$, also

$$(\mathfrak{R}^* - \varkappa)^s h^* = 0, \tag{3.9}$$

so folgt nach (3.3)

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R} - \varkappa)^s h^* = 0,$$

weiter nach (3.2) und (3.5)

$$(\mathfrak{R} - \varkappa)^s h^* = c_1 e_1 = (\mathfrak{R} - \varkappa)^s c_1 (\varkappa_1 - \varkappa)^{-s} e_1,$$

also ist mit $c = c_1 (\varkappa_1 - \varkappa)^{-s}$ das Element

$$h^* - c\, e_1 = h_1 \tag{3.10}$$

eine Hauptlösung von $\mathfrak{R}$, höchstens von der Stufe s.

(3 Bc). Es sei $\varkappa = 0$ und h eine zugehörige Hauptlösung von $\mathfrak{R}$, also $\mathfrak{R}^r h = 0$. Dann ist nach (3.8) und (3.2) jedes Element der Gestalt

$$h + c e_1 = h_2^* \tag{3.11}$$

eine Hauptlösung von $\mathfrak{R}^*$, und nach (3.10) findet man so auch alle Hauptlösungen von $\mathfrak{R}^*$. Da e_1 von den Hauptlösungen h von $\mathfrak{R}$ zu 0 linear unabhängig ist, folgt $Ord_{\mathfrak{R}^*} 0 = Ord_{\mathfrak{R}} 0 + 1$.

Jede Hauptlösung h von $\mathfrak{R}$ hat die Gestalt $h = (\mathfrak{R} - \varkappa_1) h_2$, wobei $h_2 = p(\mathfrak{R}) h$ gesetzt ist mit dem Polynom

$$p(x) = \frac{-1}{\varkappa_1^r} \cdot \frac{x^r - \varkappa_1^r}{x - \varkappa_1} \qquad (r = \text{Stufe von } h).$$

h_2 ist Hauptlösung von $\mathfrak{R}$, also nach (3.11) auch von $\mathfrak{R}^*$. Umgekehrt ist für jede Hauptlösung h^* von $\mathfrak{R}^*$ auch $(\mathfrak{R} - \varkappa_1) h^*$ nach (3.4) eine Hauptlösung von $\mathfrak{R}$. D. h. $(\mathfrak{R} - \varkappa_1) h^*$ durchläuft genau alle h.

(3 Bd). Es sei $\varkappa(\varkappa - \varkappa_1) \neq 0$. Dann ist die in (3.8) erklärte Hauptlösung h_1^* genau von der Stufe r. Falls $r = 0$, folgt dies aus $h = h_1^* = 0$. Falls $r > 0$, schließen wir indirekt: Wäre

$$(\mathfrak{R}^* - \varkappa)^{r-1} h_1^* = 0,$$

so folgte mit Hilfe von (3.8) und (3.4)

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathfrak{R} - \varkappa_1)(\mathfrak{R}^* - \varkappa)^{r-1} \mathfrak{R}^* h = (\mathfrak{R} - \varkappa_1)(\mathfrak{R} - \varkappa)^{r-1} \mathfrak{R} h \\ &= [(\mathfrak{R} + \varkappa - \varkappa_1)(\mathfrak{R} - \varkappa) + \varkappa(\varkappa - \varkappa_1)](\mathfrak{R} - \varkappa)^{r-1} h. \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Minimaleigenschaft von r in (3.6).

Insbesondere ist $h_1^* \neq 0$, wenn $r > 0$; d. h.: Es ist

$$\mathfrak{R}^* h = 0 \quad \textit{nur für } h = 0. \tag{3.12}$$

Wir zeigen, (3. 8) ergänzend, daß umgekehrt jede Hauptlösung h^* von $\mathfrak{R}^*$ in der Form $\mathfrak{R}^* h$ geschrieben werden kann. Zunächst kann man nach (3. 9) behaupten: $h^* = \mathfrak{R}^* h_3^*$ mit der Hauptlösung von $\mathfrak{R}^*$

$$h_3^* = \varkappa^{-s} \sum_{\sigma=0}^{s-1} \binom{s}{\sigma} \varkappa^\sigma (-\mathfrak{R}^*)^{s-1-\sigma} h^*.$$

Stellt man nun h_3^* nach (3. 10) in der Form $h_3^* = h + ce_1$ dar, so ergibt sich wegen $\mathfrak{R}^* e_1 = 0$ die Behauptung: $h^* = \mathfrak{R}^* h$. Aus (3. 12) folgt, daß die eben hergestellte Zuordnung $h^* \to h$ eindeutig ist; hieraus wieder folgt $Ord_{\mathfrak{R}^*} \varkappa = Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa$. Zum Schluß beweisen wir einen Teil der Behauptung über die Beteiligung von $\varkappa$ an einem beliebigen y, einerseits hinsichtlich $\mathfrak{R}$, andererseits $\mathfrak{R}^*$. Ist $\varkappa$ hinsichtlich $\mathfrak{R}^*$ an y unbeteiligt, so ist für jede natürliche Zahl s

$$(\mathfrak{R}^* - \varkappa)^s z_s^* = y$$

lösbar. Multiplikation mit $(\mathfrak{R} - \varkappa_1)$ ergibt nach (3. 4)

$$(\mathfrak{R} - \varkappa)^s (\mathfrak{R} - \varkappa_1) z_s^* = (\mathfrak{R} - \varkappa_1) y,$$

also ist $\varkappa$ hinsichtlich $\mathfrak{R}$ an dem Element $(\mathfrak{R} - \varkappa_1) y$ unbeteiligt, daher nach (2. 5) auch an y.

(3 B e). Wir fassen das bisher Bewiesene zusammen:

Im Fall $\varkappa = 0$ ist $Ord_{\mathfrak{R}^*} \varkappa = Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa + 1$, und man erhält genau alle h^* in der Form $h + ce_1$, alle h in der Form $(\mathfrak{R} - \varkappa_1) h^*$.

Im Fall $\varkappa (\varkappa - \varkappa_1) \neq 0$ erhält man genau alle h^* durch die eindeutig umkehrbare Abbildung $h^* = \mathfrak{R}^* h$; bei dieser Abbildung haben h und h^* dieselbe Stufe. Es ist $Ord_{\mathfrak{R}^*} \varkappa = Ord_{\mathfrak{R}} \varkappa$; ist $\varkappa$ hinsichtlich $\mathfrak{R}^*$ an y unbeteiligt, so ist $\varkappa$ auch hinsichtlich $\mathfrak{R}$ an y unbeteiligt.

Damit ist eine Hälfte des Abänderungssatzes bewiesen.

(3 Bf). Das Fehlende erhält man, wenn man (e) auf $\mathfrak{L} = \varkappa_1 - \mathfrak{R}^*$ anstatt auf $\mathfrak{R}$ anwendet. Auch $\mathfrak{L}$ hat e_1 als Eigenlösung zu $\varkappa_1$. Es wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}\mathfrak{D} &= \varkappa_1 \mathfrak{D} - \mathfrak{R}\mathfrak{D}^2 = \varkappa_1 \mathfrak{D} - \mathfrak{R}\mathfrak{D} \\ &= (\varkappa_1 - \mathfrak{R})\mathfrak{D} = \varkappa_1 - \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Die Hauptlösungen von $\mathfrak{L}$ zu $\varkappa$ stimmen mit den Hauptlösungen von $\mathfrak{R}^*$ zu $\varkappa_1 - \varkappa$ überein, denn es ist

$$(\mathfrak{L} - \varkappa)^r = \pm (\mathfrak{R}^* - (\varkappa_1 - \varkappa))^r.$$

Ebenso stimmen die Hauptlösungen von $\mathfrak{L}^*$ zu $\varkappa$ mit den Hauptlösungen von $\mathfrak{R}$ zu $\varkappa_1 - \varkappa$ überein. Die Stufe einer Hauptlösung bleibt erhalten, und es ist

$$\begin{aligned} Ord_{\mathfrak{L}} \varkappa &= Ord_{\mathfrak{R}^*} (\varkappa_1 - \varkappa), \\ Ord_{\mathfrak{L}^*} \varkappa &= Ord_{\mathfrak{R}} (\varkappa_1 - \varkappa). \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Beziehungen kann man das Ergebnis der Anwendung von (e) auf $\mathfrak{L}$ auch als eine Aussage über $\mathfrak{K}$ aussprechen:

Im Falle $\varkappa = \varkappa_1$ ist $Ord_{\mathfrak{K}} \varkappa = Ord_{\mathfrak{K}^*} \varkappa + 1$, und man erhält genau alle h n der Form $h^* + c e_1$, alle h^* in der Form $(- \mathfrak{K}^*) h$.

Im Falle $\varkappa (\varkappa - \varkappa_1) \neq 0$ erhält man genau alle h durch die eindeutig umkehrbare Abbildung $h = (\varkappa_1 - \mathfrak{K}) h^*$; bei dieser Abbildung bleibt die Stufe erhalten; es ist $Ord_{\mathfrak{K}} \varkappa = Ord_{\mathfrak{K}^*} \varkappa$; ist $\varkappa$ hinsichtlich $\mathfrak{K}$ an y unbeteiligt, so ist $\varkappa$ auch hinsichtlich $\mathfrak{K}^*$ an y unbeteiligt.

Damit ist der Beweis des Abänderungssatzes beendet.

3 C. *Ergänzungen.* (a) Anstatt den Orthogonalisierungsprozeß $\mathfrak{O}$ vor $\mathfrak{K}$ einzuschalten, kann man ihn auch nach $\mathfrak{K}$ ausführen. Man erhält dann einen anderen abgeänderten Operator $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{O}\,\mathfrak{K}$. Man kann auch, unter Benutzung derselben Eigenlösung e_1, einen Orthogonalisierungsprozeß $\mathfrak{O}_1$ vor- und gleichzeitig einen anderen $\mathfrak{O}_2$ nachschalten, also $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{O}_2 \mathfrak{K} \mathfrak{O}_1$ setzen. In allen Fällen bleibt der Abänderungssatz wörtlich in Kraft. Denn es ist $\mathfrak{O}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{O}'$, wobei $\mathfrak{O}'$ der mit dem Funktional $\mathfrak{g}' = \varkappa_1^{-1}\, \mathfrak{g}\, \mathfrak{K}$ gebildete Orthogonalisierungsprozeß ist; es ist $\mathfrak{g}' e_1 = \varkappa_1^{-1}\, \mathfrak{g}\, \varkappa_1 e_1 = 1$. Ferner wird $\mathfrak{O}_2 \mathfrak{K} \mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2 \mathfrak{K}$.

Für $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{O}\mathfrak{K}$ werden die Formeln besonders einfach, die den Übergang von den Hauptlösungen von $\mathfrak{K}$ zu denen von $\mathfrak{K}^*$ vermitteln: Man erhält genau alle h^* in der Form $h^* = \mathfrak{O} h$, wenn $\varkappa \neq 0$. Denn nach dem Abänderungssatz sind die h^* identisch mit den $\mathfrak{O}\,\mathfrak{K} h$, und $\mathfrak{K} h$ durchläuft gleichzeitig mit h alle Hauptlösungen zu $\varkappa \neq 0$.

(3 Cb). Man kann den Satz so aussprechen, daß beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}^*$ ein Eigenwert $\varkappa_1 \neq 0$ in 0 übergeht. Der Zahl 0 kommt keine Sonderstellung zu. Die Schlußweise von 3 Bf gestattet es, den Satz allgemeiner zu fassen, so daß ein beliebiger Eigenwert $\varkappa_1$ in einen beliebigen anderen Wert $\varkappa_1^*$ überführt wird. Für das Iterationsverfahren ist die Wahl von $\varkappa_1^* = 0$ am natürlichsten. Denn sie vermindert den störenden Einfluß von e_1 bei der Berechnung der höheren Eigenlösungen.

(3 Cc). Durch wiederholte Abänderung von $\mathfrak{K}$ kann man beliebig viele Eigenwerte nach 0 werfen. Hat man den Operator $\mathfrak{K}$ mit den Eigenwerten $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{s-1}, \varkappa_s, \varkappa_{s+1}, \ldots$ durch $s - 1$ Abänderungsschritte in den Operator

$$\mathfrak{K}_{s-1} = \mathfrak{K} (1 - f_1 \mathfrak{g}_1) (1 - f_2 \mathfrak{g}_2) \ldots (1 - f_{s-1} \mathfrak{g}_{s-1}) \tag{3.13}$$

mit den Eigenwerten $0, \ldots, 0, \varkappa_s, \varkappa_{s+1}, \ldots$ überführt, so hat man beim nächsten Schritt irgendeine Eigenlösung f_s von $\mathfrak{K}_{s-1}$ zu $\varkappa_s$ und irgendein lineares Funktional $\mathfrak{g}_s y$ mit $\mathfrak{g}_s f_s = 1$ auszuwählen und

$$\mathfrak{K}_s = \mathfrak{K}_{s-1} (1 - f_s \mathfrak{g}_s)$$

zu setzen; dann hat $\mathfrak{R}_s$ die Eigenwerte $0, \ldots, 0, 0, \varkappa_{s+1}, \ldots$. Die Formeln, die den Übergang von den Hauptlösungen von $\mathfrak{R}_s$ zu denen von $\mathfrak{R}$ vermitteln, werden umständlich. Sie vereinfachen sich, wenn alle von 0 verschiedenen Eigenwerte $\varkappa$ von $\mathfrak{R}$ die Ordnung 1 haben. (Bei Zahlenrechnungen darf dies gewöhnlich angenommen werden.) In diesem Fall ist für jede Hauptlösung $\mathfrak{R}h = \varkappa h$, und an die Stelle der Zuordnung $h \rightleftarrows h^*$ des Abänderungssatzes können die einfacheren Formeln treten [für $\varkappa(\varkappa - \varkappa_1) \neq 0$]:

$$h^* = \left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa} e_1 \mathfrak{g}\right) h, \tag{3.14}$$

$$h = \left(1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa - \varkappa_1} e_1 \mathfrak{g}\right) h^*. \tag{3.15}$$

Diese Formeln kehren sich gegenseitig um, im Gegensatz zu den Formeln von 3 A. Bei wiederholter Abänderung erhält man hieraus die folgende Darstellung der Eigenlösung e_s von $\mathfrak{R}$ zu $\varkappa_s$ durch die auf $\mathfrak{g}_\sigma f_\sigma = 1$ normierten Eigenlösungen f_σ von $\mathfrak{R}_\sigma$ zu $\varkappa_\sigma$ $(\sigma \leqq s)$:

$$e_s = \left(1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_s - \varkappa_1} f_1 \mathfrak{g}_1\right)\left(1 + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_s - \varkappa_2} f_2 \mathfrak{g}_2\right) \cdots \left(1 + \frac{\varkappa_{s-1}}{\varkappa_s - \varkappa_{s-1}} f_{s-1}\, \mathfrak{g}_{s-1}\right) f_s. \tag{3.16}$$

(3 Cd). Es ist bemerkenswert, daß man, unter den Voraussetzungen von (3. 16), $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \cdots = \mathfrak{g}_{s-1} = \mathfrak{g}$ wählen kann. Man erreicht damit eine weitere Vereinfachung der Formeln, allerdings auf Kosten der Genauigkeit. Und zwar ist jedes Funktional $\mathfrak{g}y$ brauchbar, für das $\mathfrak{g} e_\sigma \neq 0$ ist $(\sigma = 1, \ldots, s - 1)$. Zunächst kann nämlich $e_1 = f_1$ durch die Bedingung $\mathfrak{g} f_1 = 1$ normiert werden, also darf man $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ wählen. Weiter wird nach (3. 14), angewandt auf $h = e_2$, $h^* = f_2$,

$$\mathfrak{g} f_2 = \mathfrak{g}\left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} e_1 \mathfrak{g}\right) e_2 = \left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right) \mathfrak{g} e_2 \neq 0,$$

so daß f_2 durch $\mathfrak{g} f_2 = 1$ normiert und $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$ gewählt werden kann. Nun wird nach (3. 16)

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathfrak{g} e_3 &= \mathfrak{g}\left(1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3 - \varkappa_1} f_1 \mathfrak{g}\right)\left(1 + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3 - \varkappa_2} f_2 \mathfrak{g}\right) f_3 \\ &= \left(1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3 - \varkappa_1}\right)\left(1 + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3 - \varkappa_2}\right) \mathfrak{g} f_3, \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{g} f_3 \neq 0$, f_3 kann auf $\mathfrak{g} f_3 = 1$ normiert werden und $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$ ist zulässig, usw. Wir führen in (3. 16) $\mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{g}$ ein und berücksichtigen die Gleichung

$$\mathfrak{g}\left(1 + \frac{\varkappa_\sigma}{\varkappa_s - \varkappa_\sigma} f_\sigma \mathfrak{g}\right) = \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_\sigma} \mathfrak{g};$$

wenn man noch $\mathfrak{g} e_s \neq 0$ voraussetzt, so daß man auch f_s auf $\mathfrak{g} f_s = 1$ normieren kann, erhält man eine Eigenlösung e_s' von $\mathfrak{R}$ zu $\varkappa_s$ durch

$$e_s' = f_s + \frac{\varkappa_{s-1}}{\varkappa_s - \varkappa_{s-1}} f_{s-1} + \cdots + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_s - \varkappa_1} \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_2} \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_3} \cdots \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_{s-1}} f_1.$$

Hierfür ist nach (3. 16)

$$\mathfrak{g}\, e_s' = \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_1} \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_2} \cdots \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s - \varkappa_{s-1}}.$$

Normiert man die Eigenlösung $e_s = \text{const.}\, e_s'$ auf $\mathfrak{g}\, e_s = 1$, so erhält man

$$(3.17)\quad e_s = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_s} f_1 + \left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_s}\right) \frac{\varkappa_2}{\varkappa_s} f_2 + \cdots + \left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_s}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varkappa_{s-1}}{\varkappa_s}\right) \frac{\varkappa_s}{\varkappa_s} f_s.$$

Besonders einfach wird der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}$:

$$(3.18)\qquad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{R}\,(1 - f_s\, \mathfrak{g}).$$

Dies folgt aus (3. 13) unter Benutzung von $\mathfrak{g}\,(1 - f_\sigma\, \mathfrak{g}) = 0$.

3 D. *Beispiele.* (a) Wir beweisen zunächst das unter 1 C beschriebene Abänderungsprinzip für algebraische Operatoren, das für uns den Ausgangspunkt gebildet hat. (Ein anderer Beweis findet sich in [6], 4. 18; dort wird vorausgesetzt, daß alle Eigenwerte die Ordnung 1 haben.) Y sei die Gesamtheit der Vektoren y mit n Komponenten; $\mathfrak{R}$ sei gegeben durch die n-reihige Matrix $A = (a_{\alpha\beta})$. An linearen Funktionalen $\mathfrak{g}\, y$ gibt es nur die inneren Produkte $\mathfrak{g}\, y = \sum \bar{g}_\alpha\, y_\alpha$ mit einem beliebigen festen Vektor g. Ist $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Eigenvektor von $\mathfrak{R}$ zu $\varkappa_1 \neq 0$ und ist g so gewählt, daß $\mathfrak{g}\, e = 1$, so wird der zugehörige Orthogonalisierungsoperator $\mathfrak{O}$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 - e_1\bar{g}_1 & -e_1\bar{g}_2 & \ldots & -e_1\bar{g}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -e_n\bar{g}_1 & -e_n\bar{g}_2 & \ldots & 1 - e_n\bar{g}_n \end{pmatrix}$$

und der abgeänderte Operator $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}\,\mathfrak{O}$ durch die Matrix

$$(3.19)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} - \varkappa_1 e_1\bar{g}_1 & a_{12} - \varkappa_1 e_1\bar{g}_2 & \ldots & a_{1n} - \varkappa_1 e_1\bar{g}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - \varkappa_1 e_n\bar{g}_1 & a_{n2} - \varkappa_1 e_n\bar{g}_2 & \ldots & a_{nn} - \varkappa_1 e_n\bar{g}_n \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\mathfrak{g}\, e = 1$ ist von selbst erfüllt, wenn $e_1 \neq 0$ ist und die g_α so bestimmt sind, daß die erste Zeile von (3. 19) aus lauter Nullen besteht. Denn dann wird

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{1\alpha} - \varkappa_1 e_1\bar{g}_\alpha)\, e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{1\alpha} e_\alpha - \varkappa_1 e_1 \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{g}_\alpha\, e_\alpha$$
$$= \varkappa_1 e_1 - \varkappa_1 e_1\, \mathfrak{g}\, e = \varkappa_1 e_1\,(1 - \mathfrak{g}\, e).$$

In diesem Fall hat die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte von (3. 19) entstehende Matrix B einen Eigenwert 0 weniger als (3. 19), also nach dem

Abänderungssatz einen Eigenwert $\varkappa_1$ weniger als A, wenn man die Eigenwerte so oft zählt, wie ihre Ordnung angibt. — Zur mehrfachen Abänderung vgl. den Schluß von Beispiel 3 De.

In den folgenden Beispielen bedeutet Y die Gesamtheit der für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktionen $y(x)$, $\mathfrak{K}$ den Integraloperator mit dem stetigen Kern $K(x, \xi)$. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß es sich um $s \geqq 1$ voneinander verschiedene einfache Nullstellen λ_σ der Fredholmschen Determinante von $\lambda K(x, \xi)$ handelt. $\mathfrak{K}$ hat (mindestens) die Eigenwerte $\varkappa_\sigma = \lambda_\sigma^{-1}$ mit der Ordnung 1.

Wir betrachten in den folgenden Beispielen verschiedene Möglichkeiten, das lineare Funktional g zu wählen, also verschiedene Abänderungen desselben Operators $\mathfrak{K}$.

Beispiel (3 Db). Einmalige Abänderung vermöge $\mathfrak{g}\, y = \int \bar{e}_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$. Die Forderung $\mathfrak{g}\, e_1 = 1$ verlangt die Normierung $\int |e_1(\xi)|^2\, d\xi = 1$. Es wird

$$\mathfrak{D}\, y = y(x) - e_1(x) \int_0^1 \bar{e}_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Die Funktion $z(x) = \mathfrak{D}\, y$ ist zu $e_1(x)$ orthogonal: $\int \bar{e}_1(\xi)\, z(\xi)\, d\xi = 0$. Weiter wird

$$\mathfrak{K}^* y = \mathfrak{K}\mathfrak{D}\, y = \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi - \frac{1}{\lambda_1} e_1(x) \int_0^1 \bar{e}_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_0^1 K^*(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

mit

$$K^*(x, \xi) = K(x, \xi) - \frac{e_1(x)\, \bar{e}_1(\xi)}{\lambda_1}. \tag{3.20}$$

$\mathfrak{K}^*$ ist wieder ein Integraloperator. Der Abänderungssatz besagt, daß die Eigenwerte des Kerns $K^*(x, \xi)$ aus denen von $K(x, \xi)$ durch Streichen von λ_1 entstehen. Die Eigenfunktionen von $K^*(x, \xi)$ zu λ_σ ($\sigma > 1$) sind nach (3. 14) gegeben durch

$$e_\sigma^*(x) = e_\sigma(x) - e_1(x) \frac{\lambda_\sigma}{\lambda_1} \int_0^1 \bar{e}_1(\xi)\, e_\sigma(\xi)\, d\xi.$$

Sie sind nur dann zu e_1 orthogonal, wenn schon die $e_\sigma(x)$ zu $e_1(x)$ orthogonal sind; dann wird $e_\sigma^*(x) = e_\sigma(x)$. Dieser Fall liegt bei selbstadjungierten

Aufgaben vor, d. h. bei hermiteschem Kern: $K(x, \xi) = \overline{K}(\xi, x)$; (3. 20) ist dann die viel benutzte Abspaltung eines Kerns vom Rang 1 (vgl. [8], S. 256).

Beispiel (3 Dc). Mehrmalige Abänderung durch Nachschalten der aus $g_\sigma y = \int \bar{f}_\sigma(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$ entspringenden Orthogonalisierungsprozesse. Wir beginnen, wie in Beispiel b, mit $g_1 y = \int \bar{e}_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, führen aber den zugehörigen Orthogonalisierungsprozeß $\mathfrak{O}_1 = 1 - e_1 g_1$ nach $\mathfrak{K}$ aus:

$$\mathfrak{K}_1 y = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{K} y = \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi - e_1(x) \int_0^1 \int_0^1 K(t, \xi)\, \bar{e}_1(t)\, y(\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_0^1 K_1(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

mit

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi) - e_1(x) \int_0^1 K(t, \xi)\, \bar{e}_1(t)\, dt. \tag{3. 21}$$

$K_1(x, \xi)$ hat die Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Die zugehörigen Eigenfunktionen $e_{1\sigma}$ sind nach 3Ca $e_{1\sigma} = \mathfrak{O}_1 e_\sigma$; sie sind orthogonal zu e_1. Insbesondere ist bis auf Normierung die zu λ_2 gehörende Eigenfunktion $f_2 = e_{12} = \mathfrak{O}_1 e_2$. Wir machen $\int |f_2(\xi)|^2 d\xi = 1$ und wählen $g_2 y = \int \bar{f}_2(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$. Es wird

$$\mathfrak{O}_2 y = y(x) - f_2(x) \int_0^1 \bar{f}_2(\xi)\, y(\xi)\, d\xi,$$

$$\mathfrak{K}_2 y = \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_1 \mathfrak{K} y = \int_0^1 K_2(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

mit

$$K_2(x, \xi) = K_1(x, \xi) - f_2(x) \int_0^1 K_1(t, \xi)\, \bar{f}_2(t)\, dt$$

$$= K(x, \xi) - e_1(x) \int_0^1 K(t, \xi)\, \bar{e}_1(t)\, dt - f_2(x) \int_0^1 K(t, \xi)\, \bar{f}_2(t)\, dt.$$

Die Eigenfunktionen von $K_2(x, \xi)$ zu $\lambda_\sigma (\sigma = 3, 4, \ldots)$ sind

$$e_{2\sigma} = \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_1 e_\sigma.$$

Insbesondere ist bis auf Normierung $f_3 = e_{23} = \mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}_1 e_3$; f_3 ist orthogonal zu e_1 und f_2, also auch zu e_2. Man erkennt, daß $f_1, f_2, f_3, \ldots$ einfach die Funktionenfolge ist, die aus $e_1, e_2, e_3, \ldots$ durch Anwendung des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens ([4], S. 1394) entsteht: f_s ist diejenige normierte Linearverbindung von $e_1, \ldots, e_s$, die zu $e_1, \ldots, e_{s-1}$ orthogonal

ist. Auch diese Wahl der $\mathfrak{g}_\sigma$ führt im selbstadjungierten Fall auf das klassische Abspaltungsverfahren. Es wird dann nämlich

$$e_1(x)\int_0^1 K(t,\xi)\,\bar{e}_1(t)\,dt = e_1(x)\int_0^1 \overline{K}(\xi,t)\,\bar{e}_1(t)\,dt = \frac{e_1(x)\,\bar{e}_1(\xi)}{\lambda_1}$$

und ebenso wegen $f_2(x) = e_2(x)$

$$f_2(x)\int_0^1 K(t,\xi)\,\bar{f}_2(t)\,dt = \frac{e_2(x)\,\bar{e}_2(\xi)}{\lambda_2} \quad \text{usw.}$$

Beispiel (3 Dd). Durch geeignete Wahl von $\mathfrak{g}$ kann man es stets erreichen, daß nicht nur die weiteren Eigenwerte ungeändert bleiben, sondern auch die zugehörigen Hauptlösungen. Man setzt zu diesem Zweck $\mathfrak{g}\,y = \int \bar{g}(\xi)\,y(\xi)\,d\xi$, wobei $g(x)$ eine Hauptfunktion des adjungierten Kerns $\overline{K}(\xi, x)$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}_1$ bedeutet, für welche $\mathfrak{g}\,e_1 = 1$ ausfällt; eine solche gibt es ([4], S. 1547), ihre Stufe sei r. Ist h eine Hauptfunktion zu $\lambda \neq \lambda_1$, so ist $\varkappa_1 = \lambda_1^{-1}$ an h unbeteiligt, also hat

$$(\mathfrak{K} - \varkappa_1)^r z = h$$

eine Lösung z. Damit wird

$$\mathfrak{g}\,h = \int_0^1 \bar{g}(\xi)\,(\mathfrak{K} - \varkappa_1)^r\,z(\xi)\,d\xi \tag{3.22}$$

$$= \overline{\int_0^1 \bar{z}(\xi)\,(\mathfrak{K}_a - \bar{\varkappa}_1)^r\,g(\xi)\,d\xi} = 0.$$

$\mathfrak{K}_a$ bedeutet den Integraloperator mit dem adjungierten Kern $\overline{K}(\xi, x)$. Aus (3.22) folgt $\mathfrak{K}^{*\nu} h = \mathfrak{K}^\nu h$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, also ist h auch eine Hauptfunktion von $\mathfrak{K}^*$.

Die Beziehung zwischen den Hauptlösungen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ ist hier denkbar einfach. Dieser Vorteil muß jedoch im allgemeinen mit einem Verzicht auf numerisch günstigere Möglichkeiten der Wahl von $\mathfrak{g}$ erkauft werden; auch ist die Bestimmung einer Hauptfunktion des adjungierten Kerns erforderlich. Handelt es sich nicht um eine Integralgleichung, sondern etwa um ein System von Differentialgleichungen, so muß erst die adjungierte Aufgabe aufgestellt werden. Aus diesen Gründen soll das Verfahren nicht weiter erörtert werden. Zu theoretischen Zwecken wird es bisweilen angewendet ([4], S. 1547). Im selbstadjungierten Fall kann $g(x) = e_1(x)$ gewählt werden, womit man wieder auf das übliche Verfahren zurückkommt.

Beispiel (3 De). Mehrfache Abänderung vermöge $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \cdots = \mathfrak{g}$. $g(x)$ sei eine stetige Funktion mit $\mathfrak{g}\,e_\sigma = \int \bar{g}(\xi)\,e_\sigma(\xi)\,d\xi = 1$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$. Ändert man den Integraloperator $\mathfrak{K}$ mit dem Kern $K(x, \xi)$ nach 3 Cd s-mal

ab, so wird nach (3. 18) $\mathfrak{K}_s = \mathfrak{K}(1 - f_s \mathfrak{g})$, wobei f_s eine durch Umkehrung von (3. 17) zu bestimmende Linearverbindung von $e_1(x), \ldots, e_s(x)$ ist. Setzt man $\mathfrak{K} f_s = h_s(x)$, so ist $\mathfrak{K}_s$ der Integraloperator mit dem Kern

$$K_s(x, \xi) = K(x, \xi) - h_s(x)\, \bar{g}(\xi).$$

Nach dem Abänderungssatz hat $K_s(x, \xi)$ genau die Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \ldots$. Es mag überraschen, daß man $K(x, \xi)$ durch Abspalten eines einzigen Kernes vom Range 1 seiner s Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ berauben kann, denn zu diesem Zweck zieht man gewöhnlich eine Summe von s Kernen des Ranges 1 ab. Wie dies zugeht, zeigt am einfachsten ein Matrizenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrix hat die Eigenwerte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die letzte $0, 0, \gamma, \delta$, die mittlere hat den Rang 1. (Die hier auftretenden Eigenwerte haben alle die Vielfachheit 1, selbst wenn sie nicht alle voneinander verschieden sind. Um einen Eigenwert der Vielfachheit v fortzuschaffen, muß man eine Matrix mindestens vom Rang v abziehen; vgl. [4], Fußnote 490a).

Beispiel (3 Df). Einmalige Abänderung mit $\mathfrak{g}\, y = y(x_0)$. Ist x_0 eine Stelle, an welcher $e_1(x_0) \neq 0$, so kann man $e_1(x)$ durch die Forderung $e_1(x_0) = 1$ normieren und $\mathfrak{g}\, y = y(x_0)$ setzen. Es wird

$$\mathfrak{D}\, y = y(x) - e_1(x)\, y(x_0),$$

$$\mathfrak{K}^* y = \mathfrak{K}\, \mathfrak{D}\, y = \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi - \frac{1}{\lambda_1} e_1(x)\, y(x_0).$$

$\mathfrak{K}^*$ ist kein reiner Integraloperator mehr, sondern ein „gemischter" (vgl. 4 C). Die Eigenlösungen $y = e^*$ von $\mathfrak{K}^*$ zu λ^{-1} haben die gemischte Integralgleichung

$$y(x) + \frac{\lambda}{\lambda_1} e_1(x)\, y(x_0) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0$$

zu erfüllen und sind nach (3. 14) gegeben durch

$$e^*(x) = e(x) - \frac{\lambda}{\lambda_1} e_1(x)\, e(x_0),$$

worin $e(x)$ die Eigenfunktionen von $K(x, \xi)$ zu λ $(\neq \lambda_1)$ durchläuft.

4. Der Konvergenzsatz.

4 A. *Algebraische Operatoren:* (a) Zur Vorbereitung auf unseren eigentlichen Gegenstand, die Integraloperatoren, behandeln wir zunächst den im wesentlichen bekannten algebraischen Fall. Teilergebnisse, mit anderen Beweisen, finden sich z. B. in [10] und [6], 4. 17.

Y sei der Raum der Vektoren mit n komplexen Komponenten, $\mathfrak{A}$ eine lineare Abbildung von Y in sich, gegeben durch die n-reihige Matrix $A = (a_{\alpha\beta})$. Für einen beliebigen Ausgangsvektor $y^{(0)} \neq 0$ bilden wir die Iterationsfolge

$$y^{(\nu)} = \mathfrak{A}\, y^{(\nu-1)} = \mathfrak{A}^{\nu} y^{(0)} \tag{4. 1}$$

und fragen nach dem Verhalten von $y^{(\nu)}$ für große ν.

(4 Ab). Die Frage ist leicht zu beantworten, wenn $y^{(0)}$ ein Hauptvektor zu einem Eigenwert $\varkappa$ von $\mathfrak{A}$ ist. Dann ist für ein minimales $r \geqq 0$

$$(\mathfrak{A} - \varkappa)^{1+r} y^{(0)} = 0 \tag{4. 2}$$

und daher

$$\begin{aligned} y^{(\nu)} &= [(\mathfrak{A} - \varkappa) + \varkappa]^{\nu} y^{(0)} \\ &= \binom{\nu}{r} (\mathfrak{A} - \varkappa)^{r} \varkappa^{\nu-r} y^{(0)} + \binom{\nu}{r-1} (\mathfrak{A} - \varkappa)^{r-1} \varkappa^{\nu-r+1} y^{(0)} + \\ &\quad \cdots + \varkappa^{\nu} y^{(0)}. \end{aligned} \tag{4. 3}$$

Nach (4. 2) ist $(\mathfrak{A} - \varkappa)^{r} y^{(0)}$ ein Eigenvektor von $\mathfrak{A}$ zu $\varkappa$. Gegen ihn konvergiert der erste Summand von (4. 3) mit wachsendem ν bis auf Proportionalität. Die weiteren Summanden sind in bezug auf ν von kleinerer Größenordnung. Ist $\varkappa \neq 0$, so können wir dies mit der Abkürzung

$$e = \frac{\varkappa^{-r}}{r!} (\mathfrak{A} - \varkappa)^{r} y^{(0)}$$

so aussprechen: Für einen Hauptvektor $y^{(0)} \neq 0$ zu $\varkappa \neq 0$ gilt

$$y^{(\nu)} = \nu^{r} \varkappa^{\nu} \left(e + \frac{1}{\nu} d_{\nu} \right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots); \tag{4. 4}$$

dabei ist e ein Eigenvektor von $\mathfrak{A}$ zu $\varkappa$, und sämtliche Komponenten des Vektors d_{ν} liegen dem Betrage nach unter einer nur von $\mathfrak{A}$ und $y^{(0)}$ abhängigen Schranke. Ist $y^{(0)}$ sogar Eigenvektor, so gilt genauer $y^{(\nu)} = \varkappa^{\nu} e$.

Ist $\varkappa = 0$, so folgt aus (4. 2)

$$y^{(\nu)} = 0 \quad \text{für große } \nu. \tag{4. 5}$$

(4. 5) gilt spätestens von $\nu = n$ an; denn sonst wären $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, wie leicht zu sehen ist, $(n + 1)$ linear unabhängige Vektoren.

(4 Ac). Jetzt bedeute $y^{(0)}$ einen beliebigen Ausgangsvektor. Dann kann man $y^{(0)}$ auf eine einzige Art in eine Summe von Hauptvektoren von $\mathfrak{A}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\varkappa_{\alpha}$ zerlegen; und dabei fallen die Haupt-

vektoren zu genau denjenigen $\varkappa_\sigma$ von Null verschieden aus, die an $y^{(0)}$ beteiligt sind. Der Sache nach ist dies aus der Elementarteilertheorie wohlbekannt, aber vielleicht nicht in diesem Wortlaut. Der Vollständigkeit wegen soll ein Beweis folgen.

Da spätestens $y^{(n)}$ von den vorangehenden $y^{(\nu)}$ linear abhängig sein muß, gibt es ein Polynom $p(x) \not\equiv 0$, für das $p(\mathfrak{K})\, y^{(0)} = 0$ ist. $p(x)$ habe die Nullstellen $\xi_1, \ldots, \xi_s$ in den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_s$. Setzt man

$$p(x) = \prod_{\sigma=1}^{s} (x - \xi_\sigma)^{n_\sigma}, \qquad p_\sigma(x) = \frac{p(x)}{(x-\xi_\sigma)^{n_\sigma}},$$

so sind $p_1(x), \ldots, p_s(x)$ insgesamt teilerfremd, daher gibt es Polynome $q_1(x), \ldots, q_s(x)$ derart, daß

$$1 = q_1(x)\, p_1(x) + \cdots + q_s(x)\, p_s(x).$$

Setzt man hierin $\mathfrak{K}$ für x ein und wendet man den entstehenden Operator auf $y^{(0)}$ an, so wird

$$y^{(0)} = h_1^{(0)} + \cdots + h_s^{(0)}, \quad h_\sigma^{(0)} = q_\sigma(\mathfrak{K})\, p_\sigma(\mathfrak{K})\, y^{(0)}.$$

Es ist

$$(\mathfrak{K} - \xi_\sigma)^{n_\sigma} h_\sigma^{(0)} = q_\sigma(\mathfrak{K})\, p(\mathfrak{K})\, y^{(0)} = 0,$$

also ist, falls $h_\sigma^{(0)} \neq 0$, ξ_σ Eigenwert von $\mathfrak{K}$ und $h_\sigma^{(0)}$ ein zugehöriger Hauptvektor.

Umgekehrt sei irgendeine Zerlegung von $y^{(0)}$ in Hauptvektoren vorgelegt, die zu verschiedenen Eigenwerten $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ gehören:

$$y^{(0)} = h_1 + \cdots + h_t. \tag{4.6}$$

Nach (2.7) ist $\varkappa_1$ an $h_2, \ldots, h_t$ unbeteiligt; daher ist nach (2.4) $\varkappa_1$ dann und nur dann an $y^{(0)}$ beteiligt, wenn $\varkappa_1$ an h_1 beteiligt ist, d. h. wenn $h_1 \neq 0$ ist. Das Entsprechende gilt für $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$. Daraus folgt auch, daß $y^{(0)} = 0$ nur die triviale Zerlegung (4.6) mit $h_1 = \cdots = h_t = 0$ zuläßt. Also ist für beliebiges $y^{(0)}$ die Zerlegung (4.6) eindeutig.

(4 Ad). Ist $y^{(0)}$ ein beliebiger Ausgangsvektor, so kann man auf jeden Summanden der Zerlegung (4.6) das Ergebnis (b) anwenden. Hebt man die mit ν am stärksten anwachsenden Glieder hervor, so ergibt sich der

Konvergenzsatz für algebraische Operatoren: *Ist* $y^{(0)} \neq 0$ *und* $y^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y^{(0)}$, *so gibt es eine ganze Zahl* $r \geqq 0$ *und* s $(\geqq 1)$ *Eigenwerte* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ *von* $\mathfrak{K}$ *und zugehörige Eigenvektoren* $e_1, \ldots, e_s$, *derart, daß alle* $\varkappa_\sigma$ *an* $y^{(0)}$ *beteiligt sind,* $|\varkappa_1| = \cdots = |\varkappa_s|$ *ist, kein Eigenwert von größerem Betrag als* $|\varkappa_1|$ *an* $y^{(0)}$ *beteiligt ist, und daß für* $\nu \geqq n$ *gilt*

$$y^{(\nu)} = \nu^r \left(\varkappa_1^\nu e_1 + \cdots + \varkappa_s^\nu e_s + \frac{|\varkappa_1|^\nu}{\nu} d_\nu \right), \tag{4.7}$$

wobei die Komponenten des Vektors d_ν dem Betrage nach unter einer nur von $\mathfrak{A}$ und $y^{(0)}$ abhängigen Schranke liegen. Ist insbesondere an $y^{(0)}$ nur ein einziger Eigenwert $\varkappa \neq 0$ von maximalem Absolutbetrag beteiligt, so konvergiert $y^{(\nu)}$ bis auf Proportionalität gegen einen zu $\varkappa$ gehörigen Eigenvektor von $\mathfrak{A}$.

4 B. *Integraloperatoren.* Y sei jetzt der Raum der für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktionen, $\mathfrak{A}$ ein Integraloperator mit stetigem Kern.

(a) Das asymptotische Verhalten der Iterationsfolge $y^{(\nu)}$, die aus einer Hauptlösung $y^{(0)}$ zu einem Eigenwert $\varkappa \neq 0$ entspringt, ergibt sich nach der Schlußweise von 4 Ab: Es gilt mit einer nicht negativen ganzen Zahl r

$$y^{(\nu)}(x) = \nu^r \varkappa^\nu \Big(e(x) + \frac{1}{\nu} d_\nu(x)\Big); \tag{4.8}$$

$e(x)$ ist eine Eigenlösung von $\mathfrak{A}$ zu $\varkappa$, $|d_\nu(x)|$ liegt unterhalb einer nur von $\mathfrak{A}$ und $y^{(0)}$ abhängigen Schranke. Die Schlüsse von 4 Ac lassen sich nicht einfach übertragen; es gibt keinen Entwicklungssatz, der genau der Zerlegung (4. 6) entspricht, schon weil $\mathfrak{A}$ ja überhaupt keine Hauptlösung zu besitzen braucht. Wir müssen zunächst einen Ersatz für (4. 6) suchen.

(4 Bb) Wir behaupten: Sind $\varkappa_1 \neq 0, \ldots, \varkappa_s \neq 0$ Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, so läßt sich jedes y aus Y auf eine und nur eine Art zerlegen in

$$y = h_1 + \cdots + h_s + u_s, \tag{4.9}$$

worin h_σ eine Hauptlösung von $\mathfrak{A}$ zu $\varkappa_\sigma$ ist und kein $\varkappa_\sigma$ an u_s beteiligt ist ($\sigma = 1, \ldots, s$). Dann und nur dann ist $h_\sigma \neq 0$, wenn $\varkappa_\sigma$ an y beteiligt ist.

Die Behauptung über die Eindeutigkeit und die Beteiligung ist genau wie im algebraischen Fall zu beweisen (4 Ac). Daß überhaupt eine Zerlegung (4. 9) besteht, folgt leicht aus der Theorie der Hauptkerne ([4], S. 1547; [8], S. 230). Doch soll diese nicht vorausgesetzt werden. Wir führen den Beweis mit Hilfe eines Kriteriums, das uns auch später noch einmal von Nutzen sein wird:

Hilfssatz: *Dann und nur dann ist der Eigenwert $\varkappa_1 \neq 0$ hinsichtlich $\mathfrak{A}$ an y unbeteiligt, wenn die Lösung $z = z(x, \varkappa)$ von*

$$(\mathfrak{A} - \varkappa) z = y, \tag{4.10}$$

als Funktion von $\varkappa$ betrachtet, an der Stelle $\varkappa_1$ regulär ist.

Beweis des Hilfssatzes. Nach der Fredholmschen Theorie hat z an der Stelle $\varkappa_1$ keine andere Singularität als höchstens einen Pol: Es ist

$$z(x, \varkappa) = \frac{z_{-r}(x)}{(\varkappa - \varkappa_1)^r} + \cdots + \frac{z_{-1}(x)}{(\varkappa - \varkappa_1)} + z_0(x) + z_1(x)(\varkappa - \varkappa_1) + \cdots \tag{4.11}$$

mit stetigen Koeffizienten $z_\varrho(x)$. Koeffizientenvergleich in (4. 10) ergibt

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{K} - \varkappa_1)\, z_{-r} &&= 0\\
&(\mathfrak{K} - \varkappa_1)\, z_{-r+1} - z_{-r} &&= 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&(\mathfrak{K} - \varkappa_1)\, z_0 - z_{-1} &&= y\\
&(\mathfrak{K} - \varkappa_1)\, z_1 - z_0 &&= 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots &&
\end{aligned}
\tag{4. 12}
$$

Die ersten Gleichungen zeigen, daß $z_{-r}, z_{-r+1}, \ldots, z_{-1}$ Hauptlösungen von $\mathfrak{K}$ zu $\varkappa_1$ sind. Folglich haben wir mit $m = Ord_{\mathfrak{K}}\, \varkappa_1$

$$(\mathfrak{K} - \varkappa_1)^m z_{-\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

d. h. $z' = (\mathfrak{K} - \varkappa_1)^m z$ ist bei $\varkappa_1$ regulär. Nun ist aber z' nichts anderes als die Lösung von (4. 10) mit der rechten Seite $y' = (\mathfrak{K} - \varkappa_1)^m y$. Daher ist für jedes y', an welchem $\varkappa_1$ unbeteiligt ist, z' regulär. Damit ist — bis auf die veränderte Bezeichnung y', z' statt y, z — eine Hälfte des Hilfssatzes bewiesen. Nun sei umgekehrt das z von (4. 10) in $\varkappa_1$ regulär. Dann ist $z_{-1} = 0$. Setzt man dies in (4. 12) ein, so ergibt sich

$$(\mathfrak{K} - \varkappa_1)^s z_{s-1} = y \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{4. 13}$$

Also ist $\varkappa_1$ an y unbeteiligt. Der Hilfssatz ist bewiesen, wir kommen zum Beweis von (4. 9).

Wir bestimmen zunächst eine Hauptlösung h_1 zu $\varkappa_1$ derart, daß $\varkappa_1$ an $y - h_1$ nicht mehr beteiligt ist. Diese Forderung erfüllt $h_1 = -z_{-1}$, wobei z_{-1} durch (4. 10) und (4. 11) bestimmt ist. Denn nach (4. 12) ist

$$(\mathfrak{K} - \varkappa)\,(z_0 + z_1(\varkappa - \varkappa_1) + \cdots) = y + z_{-1},$$

also ist $\varkappa_1$ nach dem Hilfssatz an $y + z_{-1}$ nicht beteiligt.

Ebenso findet man zu den übrigen Eigenwerten $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ Hauptlösungen $h_2, \ldots, h_s$ derart, daß $\varkappa_\sigma$ an $y - h_\sigma$ unbeteiligt ist. Nach (2. 4) und (2. 7) ist dann $\varkappa_\sigma$ auch an

$$u_s = y - (h_1 + \cdots + h_s) = (y - h_\sigma) - \sum_{\substack{\varrho = 1\\ \varrho \neq \sigma}}^{s} h_\varrho$$

unbeteiligt, womit die gesuchte Zerlegung (4. 9) hergestellt ist.

(4 Bc). Die Zerlegung (4. 9) geht dann in einen Entwicklungssatz über, wenn man u_s durch Erhöhung der Anzahl s der berücksichtigten Eigenwerte beliebig klein machen kann. Wie schon erwähnt, ist das im allgemeinen nicht möglich. Man kann aber stets erreichen, daß die aus u_s entstehende Iterationsfolge asymptotisch beliebig klein wird. Wir folgern dies aus dem

Satz: *Es sei $k > 0$. Ist an der stetigen Funktion y kein Eigenwert $\varkappa$ von $\mathfrak{K}$ mit $|\varkappa| \geqq k$ beteiligt, so gilt für alle $y^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y$*

$$|y^{(\nu)}(x)| \leqq C k^\nu,$$

wobei C eine nur von $\mathfrak{K}$, $y^{(0)}$ und k abhängige Zahl bedeutet.

Beweis. Für große $\varkappa$ wird die Lösung $z = z(x, \varkappa)$ von $(\mathfrak{K} - \varkappa) z = y$ durch die Neumannsche Reihe dargestellt:

$$z(x, \varkappa) = -\frac{y^{(0)}(x)}{\varkappa} - \frac{y^{(1)}(x)}{\varkappa^2} - \frac{y^{(2)}(x)}{\varkappa^3} - \cdots.$$

Nach dem Hilfssatz von 4 Bb ist $z(x, \varkappa)$ für $|\varkappa| \geqq k$ regulär, also die Neumannsche Reihe konvergent. Nach Cauchy wird

$$y^{(\nu)}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\varkappa| = k} z(x, \varkappa) \varkappa^\nu d\varkappa.$$

Der Satz ist daher richtig mit $C = kM$, wobei M das Maximum von $|z(x, \varkappa)|$ für $0 \leqq x \leqq 1$, $|\varkappa| = k$ bedeutet.

Eine Folge dieses Satzes ist, daß die Iterierten einer Ausgangsfunktion $y^{(0)}$, an der überhaupt kein Eigenwert oder nur $\varkappa = 0$ beteiligt ist, mit wachsendem ν kleiner werden als ε^ν, für jedes noch so kleine positive ε, und zwar gleichmäßig in x. Diese Tatsache tritt bei Integraloperatoren an die Stelle von (4. 5).

Besitzt $\mathfrak{K}$ von Null verschiedene Eigenwerte, so denken wir sie uns nach absteigender Größe geordnet: $|\varkappa_1| \geqq |\varkappa_2| \geqq \cdots$. Nach (4. 9) zerlegen wir eine gegebene Funktion y in der Gestalt

$$y = \sum_{\sigma=1}^{s} h_\sigma + u_s$$

für jedes s. Die hier auftretende Hauptlösung h_σ zu $\varkappa_\sigma$ hängt wegen der Eindeutigkeit von (4. 9) nicht davon ab, welche Zahl $s \geqq \sigma$ benutzt wird, und kann als der Anteil von $\varkappa_\sigma$ an y bezeichnet werden. Wenden wir $\mathfrak{K}^\nu$ an, so erhalten wir als Ersatz für (4. 6) die

Asymptotische Entwicklung: *Für die Iterierten $y^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y$ gilt bei $\nu \to \infty$*

$$y^{(\nu)} \approx h_1^{(\nu)} + h_2^{(\nu)} + \cdots + h_s^{(\nu)} + \cdots.$$

Dabei ist h_σ der Anteil des Eigenwertes $\varkappa_\sigma$ an y.

Es ist zu beachten, daß dies nicht eine Reihenentwicklung einer festen Iterierten $y^{(\nu)}$ ist, sondern, bei festgehaltenem s, eine Näherung für die Iterierten genügend hoher Nummer: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und s so groß gewählt, daß $\varepsilon > |\varkappa_{s+1}| \geqq \cdots$, so ist für alle ν

$$|y^{(\nu)} - (h_1^{(\nu)} + \cdots + h_s^{(\nu)})| < C \varepsilon^\nu, \tag{4. 14}$$

wobei C von $\mathfrak{K}$, y, ε, s, aber nicht von ν oder x abhängt.

(4 Bd). Aus der asymptotischen Entwicklung folgt leicht der

Konvergenzsatz für Integraloperatoren: *Ist an der stetigen Funktion $y^{(0)}$ ein von Null verschiedener Eigenwert des Integraloperators $\mathfrak{K}$ mit stetigem Kern beteiligt, so gibt es eine ganze Zahl $r \geqq 0$, sowie $s\,(\geqq 1)$ Eigenwerte $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ von $\mathfrak{K}$ und zugehörige Eigenlösungen $e_1, \ldots, e_s$, derart, daß alle $\varkappa_\sigma$ an $y^{(0)}$ beteiligt sind, $|\varkappa_1| = \cdots = |\varkappa_s| > 0$ ist, kein Eigenwert von größerem Betrage als $|\varkappa_1|$ an $y^{(0)}$ beteiligt ist, und daß für alle Iterierten $y^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y^{(0)}$ gilt*

$$y^{(\nu)}(x) = \nu^r \left(\varkappa_1^\nu e_1(x) + \cdots + \varkappa_s^\nu e_s(x) + \frac{|\varkappa_1|^\nu}{\nu} d_\nu(x)\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

wobei $|d_\nu(x)|$ unterhalb einer von $\mathfrak{K}$ und $y^{(0)}$ abhängigen, aber von ν und x unabhängigen Schranke liegt. Gibt es insbesondere unter den an $y^{(0)}$ beteiligten Eigenwerten nur einen einzigen $\varkappa_1$ von maximalem Absolutbetrag und ist $\varkappa_1 \neq 0$, so konvergiert $y^{(\nu)}$ bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen eine zu $\varkappa_1$ gehörige Eigenlösung $e_1(x)$, und für jedes x mit $e_1(x) \neq 0$ ist

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y^{(\nu)}(x)}{y^{(\nu-1)}(x)} = \varkappa_1$$

gleichmäßig für alle x mit $|e_1(x)| > \delta > 0$.

Ist an $y^{(0)}$ kein Eigenwert oder nur $\varkappa = 0$ beteiligt, so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$|y^{(\nu)}(x)| < C(\mathfrak{K}, y^{(0)}, \varepsilon) \cdot \varepsilon^\nu,$$

und zu jedem x, für welches nur endlich oft $y^{(\nu)}(x) = 0$ ist, gibt es eine unendliche Teilfolge ν' mit

$$\lim_{\nu' \to \infty} \frac{y^{(\nu')}(x)}{y^{(\nu'-1)}(x)} = 0.$$

Beweis. Gibt es einen von Null verschiedenen Eigenwert, der an $y^{(0)}$ beteiligt ist, und ist k der maximale Absolutbetrag eines solchen Eigenwertes, so wählen wir ε in (4. 14) als irgendeine Zahl zwischen k und dem nächstkleineren Eigenwertbetrag. Dann brauchen wir in (4. 14) nur diejenigen an $y^{(0)}$ beteiligten Eigenwerte $\varkappa_\sigma$ zu berücksichtigen, für welche $|\varkappa_\sigma| = k$ ist. Wir heben von den $h_\sigma^{(\nu)}$ die mit ν am stärksten wachsenden Bestandteile gemäß (4. 8) hervor und fassen den Rest (von der Größenordnung $k^\nu \nu^{r-1}$) mit dem Fehlerglied der asymptotischen Entwicklung (von der kleineren Größenordnung ε^ν) zusammen zu $k^\nu \nu^{r-1} d_\nu(x)$. Ist nur ein maximaler Eigenwert $\varkappa_1$ an $y^{(0)}$ beteiligt, so folgt gleichmäßig in x

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y^{(\nu)}(x)}{y^{(\nu)}(x_0)} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{e_1(x) + \frac{1}{\nu} d_\nu(x)}{e_1(x_0) + \frac{1}{\nu} d_\nu(x_0)} = \frac{e_1(x)}{e_1(x_0)},$$

wenn $e_1(x_0) \neq 0$, und

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y^{(\nu)}(x)}{y^{(\nu-1)}(x)} = \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu} \cdot \varkappa_1 \cdot \frac{1 + \frac{1}{\nu} \frac{d_\nu(x)}{e_1(x)}}{1 + \frac{1}{\nu-1} \frac{d_{\nu-1}(x)}{e_1(x)}} = \varkappa_1,$$

wenn $e_1(x) \neq 0$, und zwar gleichmäßig für alle x mit $|e_1(x)| > \delta > 0$.

Wir kommen nun zu dem Fall, daß entweder gar kein Eigenwert oder nur $\varkappa = 0$ an $y^{(0)}$ beteiligt ist. Für ein festes x sei $y^{(\nu)}(x) \neq 0$ für alle $\nu \geqq \nu_0$. Dann existieren alle Quotienten $q_\nu = y^{(\nu)}(x)/y^{(\nu-1)}(x)$ für $\nu > \nu_0$. Wäre 0 kein Häufungspunkt der Folge q_ν, so wäre stets $|q_\nu| > 2\varepsilon > 0$ mit einem festen ε, daher

$$|y^{(\nu)}(x)| > (2\varepsilon)^{\nu-\nu_0} |y^{(\nu_0)}(x)| \quad \text{für} \quad \nu > \nu_0.$$

Dem widerspricht die schon in 4 Bc vermerkte Tatsache, daß $|y^{(\nu)}(x)| < \varepsilon^\nu$ ist für alle genügend großen ν.

(4 Be). Der Konvergenzsatz bleibt unter allgemeineren Voraussetzungen über $y^{(0)}$ und den Kern $K(x, \xi)$ gültig. Z. B. dann, wenn Y der Raum der nebst Absolutquadrat integrierbaren Funktionen und $K(x, \xi)$ brauchbar unstetig ist; d. h. $K(x, \xi)$ soll in jeder der beiden Veränderlichen nebst Absolutquadrat integrierbar sein und die Eigenschaft haben:

$$\int_0^1 |K(s', t) - K(s, t)|^2 \, dt \to 0, \qquad \int_0^1 |K(t, s') - K(t, s)|^2 \, dt \to 0,$$

wenn $|s - s'| \to 0$. Denn auch in diesem Fall gelten die wesentlichen Behauptungen der Fredholmschen Theorie ([9], S. 20 ff). Insbesondere ist die Neumannsche Reihe eine meromorphe Funktion von $\varkappa^{-1}$. Obwohl jetzt unbeschränkte Funktionen $y^{(0)}$ zugelassen sind, gilt die Aussage über die Beschränktheit von $d_\nu(x)$ nach wie vor; die Iterierten sowie alle Hauptfunktionen sind von selbst stetig.

Der Fall, daß die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen erhöht wird und es sich z. B. um Raumintegrale über einen endlichen Grundbereich handelt, bringt nichts Neues. Eine andere Erweiterung müssen wir ausführlicher behandeln.

4 C. *Gemischte Integraloperatoren.* (a) Beispiel 3 Df führte auf einen Operator der Gestalt

$$(4.15) \qquad \mathfrak{R}y = \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + k_1(x)\, y(x_1) + \cdots + k_n(x)\, y(x_n);$$

$K(x, \xi)$, $k_\alpha(x)$ sind für $0 \leqq x, \xi \leqq 1$ gegebene stetige Funktionen, $x_1, \ldots, x_n$ gegebene Zahlen aus demselben Intervall. Solche „gemischten" oder „belasteten" Integraloperatoren treten bei vielen physikalischen Aufgaben auf, so bei Schwingungsaufgaben, in denen sowohl stetig verteilte als auch Einzelmassen vorkommen; ferner stellen sie sich bei Differentialgleichungen ein,

wenn die Randbedingungen linear vom Eigenwert abhängen (vgl. 5 Bb). Um den Konvergenzsatz auf diese Operatoren auszudehnen, muß man sich vergewissern, daß die wesentlichen Ergebnisse der FREDHOLMschen Theorie, nämlich die Lösbarkeitssätze und das meromorphe Verhalten der NEUMANNschen Reihe, in Kraft bleiben. Nun ist die Eigenwerttheorie der Operatoren (4. 15), vom selbstadjungierten Fall abgesehen, bisher wohl noch nicht durchgeführt worden ([4], S. 1532 und 1574). Diese Lücke muß zuerst geschlossen werden.

(4 Cb). Dies geschieht durch die Bemerkung, daß der gemischte Integraloperator (4. 15) einem System von gewöhnlichen Integraloperatoren gleichwertig ist. Außer dem Raum Y der für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktionen $y(x)$ betrachten wir den Raum Z der Vektoren $z = z(x)$ mit $n+1$ in $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Komponenten $z_1(x), \ldots, z_{n+1}(x)$. Jedem Element y aus Y ordnen wir den Vektor $z = \mathfrak{Z}\, y$ aus Z zu, dessen Komponenten $z_1(x) = y(x_1), \ldots, z_n(x) = y(x_n)$, $z_{n+1}(x) = y(x)$ sind. Die n ersten Komponenten sind konstant. $\mathfrak{Z}$ bildet Y linear und eineindeutig auf einen Teilraum von Z ab. Wir zeigen, daß der vorgelegte, in Y definierte gemische Integraloperator (4. 15) einem gewöhnlichen Integraloperator $\mathfrak{L}$ in Z gleichwertig ist, und zwar erklären wir die $(n+1)$ Komponenten des Vektors $\mathfrak{L}\, z$ folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}z)_1 &= \int_0^1 k_1(x_1) z_1(\xi)\, d\xi + \cdots + \int_0^1 k_n(x_1)\, z_n(\xi)\, d\xi + \\
&\qquad + \int_0^1 K(x_1, \xi)\, z_{n+1}(\xi)\, d\xi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\mathfrak{L}z)_n &= \int_0^1 k_1(x_n) z_1(\xi)\, d\xi + \cdots + \int_0^1 k_n(x_n)\, z_n(\xi)\, d\xi + \\
&\qquad + \int_0^1 K(x_n, \xi)\, z_{n+1}(\xi)\, d\xi \qquad (4.16) \\
(\mathfrak{L}z)_{n+1} &= \int_0^1 k_1(x) z_1(\xi)\, d\xi + \cdots + \int_0^1 k_n(x)\, z_n(\xi)\, d\xi + \\
&\qquad + \int_0^1 K(x, \xi)\, z_{n+1}(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung besagt, für $z = \mathfrak{Z}\, y$ angeschrieben:

$$(\mathfrak{L}\,\mathfrak{Z}\, y)_{n+1} = \mathfrak{K}\, y = (\mathfrak{Z}\,\mathfrak{K}\, y)_{n+1}; \qquad (4.17)$$

die n ersten Gleichungen besagen nur: Für $\alpha = 1, \ldots, n$ ist die α-te Komponente von $\mathfrak{L}\, z$ konstant gleich dem Wert der letzten Komponente für $x = x_\alpha$; aus (4. 17) folgt für $x = x_\alpha$

$$(\mathfrak{L}\,\mathfrak{Z}\, y)_\alpha = (\mathfrak{Z}\,\mathfrak{K}\, y)_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

also ist

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}\,\mathfrak{K}.$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Gleichung findet man für jedes Polynom p einer Unbestimmten:

$$p(\mathfrak{L})\,\mathfrak{Z}\,y = \mathfrak{Z}\,p(\mathfrak{K})\,y. \tag{4.18}$$

Hieraus folgt, daß für eine Hauptlösung h von $\mathfrak{K}$ zu $\varkappa$ der zugehörige Vektor $\mathfrak{Z}\,h$ eine Hauptlösung von $\mathfrak{L}$ zu $\varkappa$ ist. Aber es gilt auch das Umgekehrte: Ist k aus Z irgendeine Hauptlösung von $\mathfrak{L}$ zu einem Eigenwert $\varkappa \neq 0$, so gibt es eine Hauptlösung h von $\mathfrak{K}$ zu $\varkappa$ derart, daß $k = \mathfrak{Z}\,h$. Denn aus $(\mathfrak{L} - \varkappa)^r k = 0$ folgt, wenn $\varkappa \neq 0$, daß k sich in der Form $k = \mathfrak{L}\,u$ mit u aus Z schreiben läßt; nach (4.16) ist dann die α-te Komponente von k für $\alpha = 1, \ldots, n$ konstant und gleich dem Wert der letzten Komponente für $x = x_\alpha$; d. h. es ist $k = \mathfrak{Z}\,h$ mit einem Element h aus Y. (4.18) zeigt, daß h Hauptlösung von $\mathfrak{K}$ ist. [Für $\varkappa = 0$ kann $\mathfrak{L}$ mehr Hauptlösungen haben; z. B. für $K(x, \xi) \equiv k_\alpha(x) \equiv 0$ ist jedes Element von Z Eigenlösung zu $\varkappa = 0$, nicht nur die $\mathfrak{Z}\,y$].

Hiermit ist die ganze Fredholmsche Theorie, die sich ja nur mit den von Null verschiedenen Eigenwerten befaßt, für $\mathfrak{K}$ als gültig nachgewiesen. Z. B. folgt, weil die Neumannsche Reihe für die Lösung z' von $(\mathfrak{L} - \varkappa)\,z' = z$ bis auf $\varkappa = 0$ höchstens Pole hat, durch die Spezialisierung $z = \mathfrak{Z}\,y$, $z' = \mathfrak{Z}\,y'$ dieselbe Tatsache für die Lösung y' von $(\mathfrak{K} - \varkappa)\,y' = y$. Da ferner bei der Abbildung $y \to \mathfrak{Z}\,y$ das Maximum des Absolutbetrages unverändert bleibt, übertragen sich auch alle Abschätzungen. Daher gilt der Konvergenzsatz auch für den gemischten Integraloperator $\mathfrak{K}$ von (4.15).

(4 Cc). Es versteht sich von selbst, daß auch Systeme gemischter Integraloperatoren auf dieselbe Art behandelt werden können. Dabei läßt man zweckmäßig für Y den Raum aller Vektoren mit $m + n$ Komponenten zu, von denen die ersten m (etwa stetig) von x abhängen, die übrigen n aber Konstanten sind. Durch einen solchen Vektor wird z. B. die Auslenkung eines mechanischen Systems beschrieben, das aus Balken und unabhängig davon beweglichen Einzelmassen besteht (wobei die Balken noch weitere Einzelmassen tragen dürfen). Die allgemeinste lineare Abbildung $y \to \mathfrak{K}\,y$ von Y in sich, die sich durch Integrationen und Summenbildungen zusammensetzen läßt, wird gegeben durch ein System der Gestalt (4.19) von $m + n$ gemischten Integraloperatoren:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{K}\,y)_\alpha &= \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ \int_0^1 K_{\alpha\mu}(x, \xi)\, y_\mu(\xi)\, d\xi + \sum_{\varrho=1}^{r} k_{\alpha\mu\varrho}(x)\, y_\mu(x_\varrho) \Big\} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} l_{\alpha\nu}(x)\, y_{m+\nu} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m), \\
(\mathfrak{K}\,y)_{m+\beta} &= \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ \int_0^1 u_{\beta\mu}(\xi)\, y_\mu(\xi)\, d\xi + \sum_{\varrho=1}^{r} v_{\beta\mu\varrho}\, y_\mu(x_\varrho) \Big\} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} w_{\beta\nu}\, y_{m+\nu} \qquad (\beta = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

mit gegebenen (etwa stetigen) Funktionen $K_{\alpha\mu}(x, \xi)$, $k_{\alpha\mu\varrho}(x)$, $l_{\alpha\nu}(x)$, $u_{\beta\mu}(\xi)$ und gegebenen Konstanten $v_{\beta\mu\varrho}$, $w_{\beta\nu}$.

Wie in (b) läßt sich die Eigenwerttheorie von $\mathfrak{K}$ als Spezialfall der Eigenwerttheorie von Systemen gewöhnlicher Integraloperatoren deuten, indem man alle auftretenden Konstanten $y_\mu(x_\varrho)$, $y_{m+\nu}$ als konstante Funktionen von x ansieht und jeden Summanden als Integral schreibt. Der Raum Z besteht hier aus den Vektoren mit $m + n + mr$ stetigen Komponenten. Die Eigenwerte $\varkappa$ des durch (4. 19) gegebenen Operators $\mathfrak{K}$ besitzen also höchstens 0 als Häufungspunkt, haben für $\varkappa \neq 0$ endliche Ordnung, die Neumannsche Reihe [wie auch die Resolvente $(\mathfrak{K} - \varkappa)^{-1}$] ist meromorph in $\varkappa^{-1}$, und es gilt der Konvergenzsatz.

4 D. *Ergänzungen und Beispiele.* (a) Wir beginnen mit einem Zahlenbeispiel, und zwar einer algebraischen Eigenwertaufgabe mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\varkappa_1 = 2$ und $\varkappa_2 = 1$; da nur ein Eigenwert von maximalem Absolutbetrag vorhanden ist, muß jede Iterationsfolge, deren Ausgangsvektor nicht gerade ein Eigenvektor zu $\varkappa_2$ ist, gegen einen Eigenvektor zu $\varkappa_1$ bis auf Proportionalität konvergieren: ein solcher ist $\{0; 1\}$. Wie viele Schritte notwendig sind, um einen vorgeschriebenen Grad der Annäherung zu erreichen, hängt natürlich bis zu einem gewissen Grade davon ab, wie gut schon der Ausgangsvektor den gesuchten Eigenvektor annähert; aber keineswegs allein hiervon. Als Beispiel betrachten wir die drei Iterationsfolgen mit den Ausgangsvektoren $x^{(0)} = \{1; 0\}$, $y^{(0)} = \{-0{,}114; 1\}$, $z^{(0)} = \{0{,}114; 1\}$. Normiert man stets die zweite Komponente auf 1, so erhalten die ersten Komponenten, die nach dem Konvergenzsatz gegen Null streben müssen, folgende Werte:

ν	0	1	2	3	4
$x^{(\nu)}$	∞	0,100	0,033	0,014	0,007
$y^{(\nu)}$	− 0,114	− 0,133	− 0,200	∞	0,100
$z^{(\nu)}$	0,114	0,036	0,015	0,007	0,003

Nach drei Schritten ist die ganz schlechte Näherung $x^{(0)}$ gut geworden, die gute Näherung $y^{(0)}$ ganz schlecht, die ebenso gute $z^{(0)}$ sehr gut. Diese Erscheinung hängt unmittelbar mit der Schiefe der beiden Eigenvektoren $e_1 = \{0; 1\}$, $e_2 = \{-0{,}1; 1\}$ zusammen. Wir wollen ihr im folgenden unter etwas allgemeineren Voraussetzungen nachgehen.

(4 D b). *Monotone Konvergenz.* Um einen genaueren Einblick in die Konvergenzverhältnisse zu bekommen, muß man ein Maß für die Abweichung

zweier Vektoren x, y von der Proportionalität einführen. Wohl am anschaulichsten ist die nicht negative Zahl $\delta(x, y)$, definiert durch

$$\delta^2(x, y) = 1 - \frac{|\sum \bar{x}_\alpha y_\alpha|^2}{\sum |x_\alpha|^2 \cdot \sum |y_\alpha|^2} = \delta^2(y, x).$$

Sie nimmt die Werte 0 bis 1 an und kann als Sinus des Winkels ψ zwischen x und y gedeutet werden; $\delta = 0$ bedeutet Proportionalität, $\delta = 1$ Orthogonalität. $100\,\delta(x, y)$ kann als Abweichung in % bezeichnet werden. $(1 - |\cos\psi|$ ist das Courantsche Unabhängigkeitsmaß zweier zu x und y proportionaler Vektoren der Länge 1; vgl. [4], S. 1520.) Legt man dieses Maß zugrunde, so bringt bei selbstadjungierten Aufgaben, d. h. bei hermitescher Matrix A, jeder Iterationsschritt eine Verbesserung. Wie das Beispiel (a) zeigt, geht diese Monotonie der Konvergenz bei nicht selbstadjungierten Aufgaben für manche Ausgangsvektoren verloren. Wir untersuchen die Verteilung derjenigen Ausgangsvektoren, welche monoton konvergente Iterationsfolgen liefern, für den Fall zweireihiger Matrizen. Ohne wesentliche Beschränkung nehmen wir die Matrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} \varkappa_2 & 0 \\ \dfrac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{a} & \varkappa_1 \end{pmatrix}$$

mit $|\varkappa_2| < |\varkappa_1|$ und $0 < |a| \leqq \infty$ an. Auf diese Gestalt läßt sich jede zweireihige Matrix, deren Eigenwerte verschiedenen Absolutbetrag haben, durch passende Wahl anderer normierter orthogonaler Grundvektoren bringen [wobei $\delta(x, y)$ invariant bleibt]. Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind $\varkappa_1$, $e_1 = \{0; 1\}$ und $\varkappa_2$, $e_2 = \{a; 1\}$. Da es auf einen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, können wir den Vektor x mit den Komponenten x_1, x_2 auch durch die eine komplexe Zahl x_1/x_2 kennzeichnen, die wir ebenfalls mit dem Buchstaben x bezeichnen. In diesem Sinne liefert der Ausgangswert $x^{(0)}$, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Iterationsfolge

$$x^{(\nu)} = \frac{q^\nu x^{(0)}}{1 - (1 - q^\nu)\dfrac{x^{(0)}}{a}} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}. \tag{4. 20}$$

Die Abweichung δ_ν dieses Vektors von e_1 wird gegeben durch

$$\delta_\nu^2 = 1 - \frac{1}{1 + |x^{(\nu)}|^2} = \frac{|x^{(\nu)}|^2}{1 + |x^{(\nu)}|^2},$$

ist also eine monotone Funktion von $|x^{(\nu)}|$. Infolgedessen tritt dann und nur dann monotone Konvergenz der Iterierten ein, wenn $x^{(0)}$ so beschaffen ist, daß stets $|x^{(\nu+1)}| < |x^{(\nu)}|$ gilt. Wie aus (4. 20) leicht folgt, gehört zu diesen „monotonen" Ausgangswerten jedes $x^{(0)}$ der Kreisscheibe

$$|x^{(0)}| < \frac{|a|}{4}(1 - |q|), \tag{4. 21}$$

aber kein $x^{(0)}$ aus der Kreisscheibe

$$\left| x^{(0)} - \frac{a}{1-q} \right| < \left| \frac{aq}{1-q} \right|. \tag{4. 22}$$

Diese enthält genau diejenigen Werte, die beim ersten Iterationsschritt schlechter werden; ihrem Rand gehört die Zahl a an, die den Eigenvektor e_2 darstellt. Im allgemeinen ist die genaue Gestalt des Bereichs der monotonen Ausgangswerte unübersichtlich; nach (4. 20) bleibt er als Restgebiet übrig, wenn man aus der $x^{(0)}$-Ebene die sämtlichen, einander teilweise überdeckenden Kreisinneren bzw. -äußeren

$$\left| 1 - (1-q^{\nu+1}) \frac{x^{(0)}}{a} \right| \leqq |q| \cdot \left| 1 - (1-q^{\nu}) \frac{x^{(0)}}{a} \right| \qquad (\nu \geqq 0) \tag{4. 23}$$

fortläßt. Beschränken wir uns auf den Fall, daß das Verhältnis q der Eigenwerte reell ist, so sind drei Unterscheidungen zu treffen. Die Vereinigungsmenge aller Gebiete (4. 23) ist im Fall

(α) $q > 0$: der Kreis um $\frac{a}{1-q}$ mit $\frac{|a|q}{1-q}$;

(β) $-\frac{1}{2} < q < 0$: das Innere zweier Kreise senkrecht zur Geraden $0a$, durch a und $a\,\frac{1+q}{1-q}$ bzw. a und $a\,\frac{1+q}{1+q-2q^2}$;

(γ) $-1 < q < -\frac{1}{2}$: wie unter (β) beschrieben, nur ist vom zweiten Kreis das Äußere zu nehmen.

Diese Gebiete sind in der folgenden Abbildung schraffiert. Die Pfeile deuten die Änderung des Gebietes mit wachsendem q an.

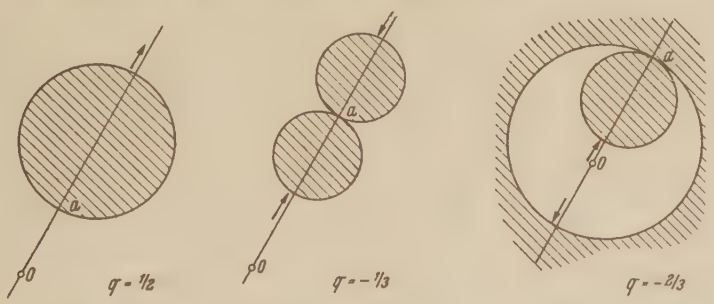

Fig. 1. Verteilung der Ausgangswerte $x^{(0)}$ nichtmonotoner Iterationsfolgen bei verschiedenen reellen Eigenwertverhältnissen $q = \varkappa_2/\varkappa_1$.

Bemerkenswert ist, daß die monotonen Ausgangswerte sich in den Fällen (α) und (β) bis ins Unendliche erstrecken; das Gebiet der nicht monotonen bleibt auf die Nähe des zweiten Eigenvektors a beschränkt und zieht sich mit $a \to 0$ auf den Nullpunkt hin zusammen. Dies bedeutet, daß man bei $-\frac{1}{2} < q < 1$ auf zwei verschiedene Arten für monotone Konvergenz sorgen kann, indem man nämlich als Ausgangsvektor eine Näherung für e_1 nimmt,

die entweder merklich besser oder merklich schlechter als e_2 ist. Natürlich ist der erste Weg vorzuziehen; wenn aber e_1 und e_2 sich nur um wenige Prozent unterscheiden, kann er ungangbar werden. Ist z. B. von vornherein bekannt, daß $\varkappa_1 \approx 2$, $\varkappa_2 \approx 1$ und $\delta(e_1, e_2) \approx 0{,}1$ (wie in Beispiel 4 Da), dann tritt monotone Konvergenz sicher für diejenigen Ausgangsvektoren ein, die entweder um weniger als 10 % oder um mehr als 29 % von e_1 abweichen. Im Zwischengebiet hängt die Monotonie noch von der Lage des Ausgangsvektors zu e_2 ab. [Hierunter fallen bei 4 Da die Vektoren $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, deren Fehler 11,3 % beträgt.] Ist man nicht in der Lage, den gesuchten Eigenvektor mit weniger als 10 % Fehler zu schätzen, so kann man monotone Konvergenz dadurch erzwingen, daß man einen Ausgangsvektor mit mindestens 29 % Fehler nimmt. [Bei 4 Da fällt hierunter $x^{(0)}$ mit einem Fehler von 100 %.]

Daß man durch Wahl einer genügend schlechten Ausgangsnäherung monotone Konvergenz sichern kann, ist keineswegs selbstverständlich (und trifft ja auch z. B. für $-1 < q < -\frac{1}{2}$ nicht zu). Es ist vielleicht nicht überflüssig, sich die ungefähre Verteilung derjenigen komplexen Eigenwertverhältnisse $q = \varkappa_2/\varkappa_1$ mit $|q| < 1$ klarzumachen, die diese besondere Eigenschaft mit den Zahlen des Intervalls $-\frac{1}{2} < q < 1$ teilen. Sie sind nach (4. 20) durch das gleichzeitige Bestehen der Ungleichungen

$$|q^\nu - q| < |q^\nu - 1| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4. 24}$$

gekennzeichnet. Wie eine Überschlagsrechnung zeigt, gehören hierzu alle q mit $|q| < \frac{1}{2}$ sowie alle Werte im Innern des Fünfecks mit den Ecken $\pm\frac{i}{2}$, $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$, 1. Bei Schwingungsaufgaben wird man oft damit rechnen können, daß das Verhältnis je zweier Eigenwerte in diesem Bereich liegt. In solchen Fällen kann man erwarten, daß eine schlechte Ausgangsnäherung eine monoton konvergente Iterationsfolge liefert.

(4 Dc). *Der Oszillationsfall.* Ist am Ausgangselement nur ein einziger Eigenwert vom Maximalbetrage beteiligt, so konvergiert die Iterationsfolge nach dem Konvergenzsatz gegen eine Eigenlösung, bis auf Proportionalität. Sind aber mehrere maximale Eigenwerte an $y^{(0)}$ beteiligt, so kann statt der Konvergenz ein Oszillieren eintreten. Dies muß der Fall sein, wenn jede Hauptlösung zu diesen maximalen Eigenwerten Eigenlösung ist, oder wenn $y^{(0)}$ und $\mathfrak{R}$ reell sind, aber die maximalen an $y^{(0)}$ beteiligten Eigenwerte nicht. Es genügt, den ersteren Fall zu behandeln. In ihm wird

$$y^{(\nu)} \approx \varkappa_1^\nu e_1 + \cdots + \varkappa_s^\nu e_s \tag{4. 25}$$

mit $|\varkappa_1| = \cdots = |\varkappa_s|$, und zwei aufeinanderfolgende Iterierte $y^{(\nu)}$, $y^{(\nu+1)}$ großer Nummer sind nicht angenähert proportional. Wohl aber werden je $s + 1$ aufeinanderfolgende Iterierte angenähert linear abhängig: Ist

$$\varkappa^s + a_1\varkappa^{s-1} + \cdots + a_{s-1}\varkappa + a_s = 0$$

die Gleichung mit den Wurzeln $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$, so ist nach (4. 25)

$$y^{(\nu+s)} + a_1 y^{(\nu+s-1)} + \cdots + a_s y^{(\nu)} \approx 0$$

für große ν. Dagegen besteht zwischen s aufeinanderfolgenden Iterierten keine angenäherte lineare Abhängigkeit. Man erhält so im oszillierenden Fall eine algebraische Näherungsgleichung, die die maximalen an $y^{(0)}$ beteiligten Eigenwerte zu Wurzeln hat. Ist diese gelöst, so erhält man die zugehörigen Eigenlösungen aus s linearen Gleichungen der Gestalt (4. 25).

Bei Zahlenrechnungen wird man in jedem Fall schlechter Konvergenz die drei letzten Glieder daraufhin ansehen, ob zwischen ihnen eine lineare Abhängigkeit besteht. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn die Störung der Konvergenz von einem einzigen weiteren Eigenwert $\varkappa_2$ herrührt, sei es, daß $|\varkappa_2| \approx |\varkappa_1|$ oder $e_2 \approx e_1$ ist oder daß $\varkappa_2$ stark an $y^{(0)}$ beteiligt ist. Die Koeffizienten a_1, a_2 sind etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen, um so genauer, je schlechter die Proportionalität, d. h. die Konvergenz ist. (Ein vereinfachtes Verfahren zur Aufstellung und näherungsweisen Lösung der quadratischen Gleichung wird in 5 Ce beschrieben werden.)

(4 Dd). *Gemeinsame Berechnung der ersten Eigenwerte aus einer algebraischen Näherungsgleichung.* Auf die letzte Bemerkung kann ein Verfahren gegründet werden, um die s ersten Eigenwerte aus einer einzigen Iterationsfolge zu bestimmen, ohne den Abänderungssatz heranzuziehen. Es erfordert die Aufstellung und Auflösung einer Näherungsgleichung s-ten Grades. Beispiel: Zur Berechnung der beiden ersten Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

bilden wir die Iterationsfolge mit dem Ausgangsvektor $y^{(0)} = \{1; 0; 0\}$. Die Vektoren $y^{(4)}$ bis $y^{(6)}$ sind durch die ersten drei Zeilen der folgenden Tabelle gegeben.

ν	4	5	6
$y^{(\nu)}$	781 −430 80	3367 −1804 242	14 197 −7 462 728
$y^{(\nu)}_{\text{norm}}$	1,0000 −0,5506 0,1024	1,0000 −0,5358 0,0719	1,0000 −0,5256 0,0513
$100\,\delta\,(y^{(\nu)}, y^{(\nu-1)})$	4,2 %	2,9 %	2,0 %
$y^{(\nu)} : y^{(\nu-1)}$	4,463 4,300 3,077	4,311 4,195 3,025	4,217 4,136 3,008

Die vierte bis sechste Zeile enthält dieselben Vektoren nach der Normierung der größten Komponente auf 1. Die Konvergenz ist nicht gut. Das geht auch aus der nächsten Zeile hervor, welche den Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungen, gemäß 4 Db bestimmt, angibt. Als Näherungswerte für $\varkappa_1$ sind in den folgenden drei Zeilen die Verhältnisse entsprechender Komponenten aufeinanderfolgender Vektoren berechnet. Die ersten beiden liegen nahe an 4, das dritte aber bei 3. Als beste Näherung wird man nach fünf Schritten $\varkappa_1 \approx 4{,}3$ ansehen, nach sechs Schritten $\varkappa_1 \approx 4{,}2$ (eine später zu erwähnende Mittelbildung ergibt $\varkappa_1 \approx 4{,}194$; vgl. 5 Cb). Um die Genauigkeit von $\varkappa_1$ zu erhöhen und gleichzeitig $\varkappa_2$ zu berechnen, stellen wir die quadratische Näherungsgleichung auf. Ihre Koeffizienten a_1, a_2 bestimmen wir, wenn wir nach fünf Iterationsschritten abbrechen, durch die Forderung, daß $y^{(5)} + a_1 y^{(4)} + a_2 y^{(3)}$ zu $y^{(4)}$ und $y^{(3)}$ orthogonal sein soll. Ihre Wurzeln sind $\varkappa_1 \approx 3{,}86$ und $\varkappa_2 \approx 3{,}33$. Geht man einen Schritt weiter, so erhält man $\varkappa_1 \approx 3{,}98$, $\varkappa_2 \approx 3{,}09$. Da die genauen Werte $\varkappa_1 = 4$, $\varkappa_2 = 3$ sind, sind die letzten Näherungswerte bei weitem am besten; ihre Fehler sind bei $\varkappa_1$ 0,5 %, bei $\varkappa_2$ 3 %. Die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen sich aus

$$e_1 + e_2 \approx y^{(5)}, \quad \varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_2 \approx y^{(6)}$$

bis auf Proportionalität zu

$$e_1 \approx \{1;\ -0{,}4977;\ 0{,}0052\}, \quad e_2 \approx \{1;\ -0{,}3542;\ -0{,}2953\};$$

genau ist

$$e_1 = \{1,\ -\tfrac{1}{2},\ 0\}, \qquad e_2 = \{1,\ -\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{3}\}.$$

Der Fehler beträgt bei e_1 nur noch 0,5 % (gegenüber 5 % bei $y^{(6)}$), bei e_2 beträgt er 4 %. — Man erkennt jetzt, warum das Verhältnis der dritten Komponenten aus dem Rahmen fällt: Es muß gegen $\varkappa_2 = 3$ streben, weil e_1 die dritte Komponente 0 hat.

(4 De). *Geschlossene Ausdrücke für die höheren Eigenwerte.* Ist man in der Lage, mehrere Iterationsschritte mit guter Genauigkeit durchzuführen, so kann man aus einer einzigen Iterationsfolge durch Determinantenbildung Näherungen für die höheren Eigenwerte gewinnen, ebenso wie man es von den algebraischen Gleichungen her kennt [7]. Dies beruht auf der folgenden, aus dem Konvergenzsatz abzulesenden Tatsache:

$y^{(0)}$ sei eine für $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion, $\mathfrak{K}$ ein Integraloperator mit stetigem Kern, $y^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y^{(0)}$. Wählt man s lineare Funktionale $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_s$ und setzt man

$$D_\nu = \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 y^{(\nu)} & \mathfrak{g}_1 y^{(\nu+1)} & \mathfrak{g}_1 y^{(\nu+s-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{g}_s y^{(\nu)} & \mathfrak{g}_s y^{(\nu+1)} & \mathfrak{g}_s y^{(\nu+s-1)} \end{vmatrix},$$

so gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_s, \tag{4.26}$$

falls die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1) $\varkappa_1, \dots, \varkappa_s$ *sind an* $y^{(0)}$ *beteiligt und paarweise verschieden;*
2) *für diese Eigenwerte ist* $\mathrm{Ord}\, \varkappa_\sigma = 1$;
3) *für jeden weiteren an* $y^{(0)}$ *beteiligten Eigenwert* $\varkappa$ *ist*

$$|\varkappa| < |\varkappa_\sigma| \quad (\sigma = 1, \dots, s);$$

4) *die Funktionale* $\mathfrak{g}_\sigma$ *sind beschränkt: Ist für alle* x $|y(x)| < 1$, *so ist* $|\mathfrak{g}_\sigma y| < C_\sigma$ *mit einer von* y *unabhängigen Konstanten* C_σ;
5) *es ist die Determinante*

$$|\mathfrak{g}_\alpha e_\beta| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, s),$$

gebildet für die zu $\varkappa_1, \dots, \varkappa_s$ *gehörigen Eigenlösungen.*

(Für $s = 1$ gibt dieser Satz eine Darstellung des ersten Eigenwertes als Grenzwert einer Quotientenfolge, die etwas allgemeiner ist als die im Konvergenzsatz beschriebene. Für den algebraischen Sonderfall findet sich der wesentliche Inhalt von (4. 26) in [6], S. 149, eine andersartige, praktisch wenig brauchbare Determinantendarstellung in [10], S. 258.)

Wir berechnen nach dieser Methode den zweiten Eigenwert des zuletzt behandelten Beispiels: Unter $\mathfrak{g}_1 y$ verstehen wir die erste Komponente von y, unter $\mathfrak{g}_2 y$ die zweite. Dann ist nach (4. 26)

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \approx \frac{\begin{vmatrix} 3367 & 14197 \\ -1804 & -7462 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 781 & 3367 \\ -430 & -1804 \end{vmatrix}} = 12{,}52,$$

also $\varkappa_2 \approx 12{,}52/4{,}2 = 2{,}98$ (Fehler 0,7 %). Durch passende Verwendung der normierten Vektoren $y^{(\nu)}_{\mathrm{norm}}$ kann man die Rechenarbeit noch vermindern; z. B. ist unmittelbar

$$\varkappa_2 \approx \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 y^{(5)} & \mathfrak{g}_1 y^{(6)}_{\mathrm{norm}} \\ \mathfrak{g}_2 y^{(5)} & \mathfrak{g}_2 y^{(6)}_{\mathrm{norm}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 y^{(4)} & \mathfrak{g}_1 y^{(5)}_{\mathrm{norm}} \\ \mathfrak{g}_2 y^{(4)} & \mathfrak{g}_2 y^{(5)}_{\mathrm{norm}} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3367 & 1{,}0000 \\ -1804 & -0{,}5256 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 781 & 1{,}0000 \\ -430 & -0{,}5358 \end{vmatrix}} = 2{,}973 \text{ (Fehler 0,9 \%)}.$$

(4 Df). *Verbesserung der Konvergenz.* Man kennt eine nützliche Transformation, welche die Konvergenz des Bernoullischen Näherungsverfahrens zur Auflösung algebraischer Gleichungen verbessert ([7], § 8). Da das Bernoullische Verfahren als Sonderfall des Iterationsverfahrens, für Matrizen der Gestalt (5. 10) A, gedeutet werden kann, liegt es nahe, diese Transformation auch bei dem allgemeinen Iterationsverfahren anzuwenden. Sie besteht

darin, daß man aus der vom Iterationsverfahren gelieferten, gegen einen Eigenwert $\varkappa$ konvergierenden Näherungsfolge k_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) die neue Folge

$$k'_\nu = \frac{k_\nu \cdot k_{\nu-2} - k_{\nu-1}^2}{k_\nu + k_{\nu-2} - 2\,k_{\nu-1}} \qquad (\nu = 3, 4, \ldots) \tag{4.27}$$

bildet. Diese konvergiert im allgemeinen ebenfalls gegen $\varkappa$, und zwar schneller als die ursprüngliche Folge k_ν. Mit Sicherheit tritt dies ein, wenn für $\nu \to \infty$

$$k_\nu = \varkappa + a q^\nu + O(r^\nu), \quad 1 > |q| > |r| \tag{4.28}$$

gilt; dann wird nämlich

$$k'_\nu = \frac{\varkappa \cdot (k_\nu + k_{\nu-2} - 2\,k_{\nu-1}) + O(q^\nu r^\nu)}{k_\nu + k_{\nu-2} - 2\,k_{\nu-1}}$$

$$= \varkappa + \frac{O(q^\nu r^\nu)}{a(q^\nu + q^{\nu-2} - 2\,q^{\nu-1}) + O(r^\nu)} = \varkappa + O(r^\nu).$$

Die Voraussetzung (4.28) ist nach dem Konvergenzsatz z. B. dann erfüllt, wenn alle Eigenwerte die Ordnung 1 und lauter verschiedene Absolutbeträge haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, z. B. $|\varkappa_1| > |\varkappa_2| = |\varkappa_3|$, so kann für besondere Iterationsfolgen $y^{(\nu)}$ und spezielle Argumente x die Näherungsfolge $k_\nu = y^{(\nu)}(x)/y^{(\nu-1)}(x)$ konvergieren und die transformierte Folge k'_ν divergieren.

Da k'_ν als Quotient von Differenzen großer Zahlen gegen Abrundungsfehler empfindlich ist, muß die Iteration mit höherer Stellenzahl durchgeführt werden, als sie für den Eigenwert selbst gefordert wird. Bei dem oben behandelten Beispiel 4 Dd genügt die vierstellige Rechnung zur Bestimmung des ersten Eigenwertes auf zwei Stellen. Man erhält nach sechs Schritten

$$\varkappa_1 \approx k'_6 = \frac{4{,}217 \cdot 4{,}463 - 4{,}311^2}{4{,}217 + 4{,}463 - 2 \cdot 4{,}311} = \frac{0{,}2358}{0{,}058} = 4{,}066.$$

Damit ist der Fehler von 5 % beim einfachen Iterationsverfahren unter geringem Rechenaufwand auf 1,6 % herabgedrückt worden. Diese Genauigkeit hätte man beim Fortsetzen des Iterationsverfahrens erst nach weiteren vier Schritten erreicht. Sind die k_ν vielstellige, ungefähr gleiche Zahlen, so spaltet man von ihnen vor Ausführung der Transformation einen gemeinsamen Summanden ab. So erhält man in dem obigen Beispiel für k'_6 mit ebenfalls vierstelliger Rechnung den bis zur angegebenen Stellenzahl genauen Wert

$$k'_6 = 4 + \frac{0{,}217 \cdot 0{,}463 - 0{,}311^2}{0{,}217 + 0{,}463 - 2 \cdot 0{,}311} = 4 + \frac{0{,}00375}{0{,}058} = 4{,}06466.$$

Man kann die Transformation (4.27) auch auf jede andere Folge anwenden, die einer Konvergenzbedingung (4.28) genügt, z. B. auf die einzelnen Komponenten der normierten iterierten Vektoren $y^{(\nu)}_{\text{norm}}$. So erhält man

$e_1 \approx y^{(6)'}_{\text{norm}} = \{1; -0{,}5030; 0{,}0084\}$; der Fehler ist von 5 auf 1 % gefallen. Kann man vielstellig rechnen, so erhält man durch wiederholte Anwendung von (4. 27) oft recht gute Ergebnisse mit geringem Arbeitsaufwand; vgl. die Zusammenstellung 5 Cf.

5. Das Iterationsverfahren.

Wir setzen in diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Ausdrucksweise voraus, daß alle betrachteten Eigenwerte die Ordnung 1 und lauter verschiedene Absolutbeträge haben. Wir sparen uns damit die Erörterung des Oszillationsfalls (vgl. 4 Dc) und können an Stelle der umständlichen Formeln des Abänderungssatzes die Formeln (3. 14) bis (3. 18) benutzen.

5 A. *Gemischte Integralgleichungen.* Y sei, wie in 4 Cc, der Raum der Vektoren y, deren erste m Komponenten $y_\mu(x)$ stetig von $0 \leqq x \leqq 1$ abhängen und deren restliche n Komponenten $y_{m+\nu}$ Konstanten sind. $\mathfrak{K}$ sei ein gemischter Integraloperator (4. 19). Die gemischte Integralgleichung

$$y = \lambda \mathfrak{K} y \tag{5. 1}$$

hat die Eigenwerte $\lambda = \varkappa^{-1}$, wobei $\varkappa$ die von 0 verschiedenen Eigenwerte des Operators $\mathfrak{K}$ durchläuft. Wir erklären die Ordnung eines Eigenwertes λ und seine Beteiligung an y hinsichtlich der Gleichung (5. 1) durch die entsprechenden Begriffe für $\varkappa = \lambda^{-1}$ hinsichtlich $\mathfrak{K}$ gemäß 2 A. Ist der absolut kleinste Eigenwert λ_1 von (5. 1) an einem Ausgangsvektor $y_1^{(0)}$ beteiligt, so konvergiert nach 4 Bd und 4 Cc die Iterationsfolge $y_1^{(\nu)} = \mathfrak{K}^\nu y_1^{(0)}$ bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen einen Eigenvektor e_1 von (5. 1) zu λ_1, und das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Vektoren $y^{(\nu-1)} : y^{(\nu)}$ konvergiert gegen λ_1. Ist e_1 bestimmt, so wählt man ein in Y definiertes lineares Funktional

$$\mathfrak{h} y = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \int_0^1 g_\alpha(\xi)\, y_\alpha(\xi)\, d\xi + \sum_{\varrho=1}^{r} c_{\alpha\varrho}\, y_\alpha(\xi_\varrho) \right\} + \sum_{\beta=1}^{n} d_\beta\, y_{m+\beta}$$

mit $r\ (\geqq 0)$ beliebigen Stellen $\xi_\varrho\ (0 \leqq \xi \leqq 1)$, für welches $\mathfrak{h} e_1 \neq 0$ ist, und setzt $\mathfrak{g}_1 y = \mathfrak{h} y / \mathfrak{h} e_1$. Hiermit bildet man nach 3 A den Orthogonalisierungsprozeß $\mathfrak{O}_1 = 1 - e_1 \mathfrak{g}_1$ und den abgeänderten Operator $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}\mathfrak{O}_1$. Dieser ist wieder ein Integraloperator der Gestalt (4. 19). Ist nun $y_2^{(0)}$ ein Vektor, an welchem der zweitkleinste Eigenwert λ_2 beteiligt ist, so ist nach dem Abänderungssatz $\varkappa_2 = \lambda_2^{-1}$ auch hinsichtlich $\mathfrak{K}_1$ an $y_2^{(0)}$ beteiligt. Also konvergiert die Iterationsfolge $y_2^{(\nu)} = \mathfrak{K}_1^\nu y_2^{(0)}$ bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen einen Eigenvektor f_2 von $\mathfrak{K}_1$ zu $\varkappa_2$, und das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Iterierter $y_2^{(\nu-1)} : y_2^{(\nu)}$ konvergiert gegen λ_2. Nun ändert man $\mathfrak{K}_1$ vermöge eines linearen Funktionals $\mathfrak{g}_2$ mit $\mathfrak{g}_2 f_2 = 1$ zu $\mathfrak{K}_2$ ab, erhält eine Iterationsfolge $y_3^{(\nu)}$ und aus ihr λ_3 und einen Eigenvektor f_3 von

$\mathfrak{K}_2$, usw. Aus $f_1 = e_1, f_2, f_3, \ldots$ erhält man die Eigenvektoren von (5. 1) nach der Formel (3. 16), worin $\varkappa_\sigma$ durch λ_σ^{-1} zu ersetzen ist. Existiert kein s-ter Eigenwert, so divergiert für jeden Ausgangsvektor $y_s^{(0)}$ die zur Berechnung von λ_s angesetzte Quotientenfolge in dem Sinne, daß sie entweder unbeschränkt ist oder unendlich viele Nenner verschwinden.

5 B. *Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.* Das beschriebene Iterationsverfahren läßt sich auf diejenigen Differentialgleichungen übertragen, bei denen man der Existenz einer Greenschen Funktion sicher ist; der Eigenwert darf in Differentialgleichung und Randbedingungen linear auftreten. Wichtig für die Anwendung ist, daß der Übergang zu einer Integralgleichung nur zum Zweck des Beweises notwendig ist. Die Ausübung des zugehörigen Integraloperators auf eine vorgelegte Funktion erfordert nicht die Kenntnis der Greenschen Funktion, sondern nur die Lösung einer Randwertaufgabe. Wir führen die Übertragung auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen durch.

(5 B a). *Systeme erster Ordnung.* Y bedeute den Raum der Vektoren $y = y(x)$ mit n Komponenten $y_\alpha(x)$, die für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig differenzierbar sind. $A(x)$ und $B(x)$ seien stetig von x abhängende, R_0, R_1, S_0, S_1 konstante n-reihige Matrizen. Wir behandeln die Eigenwertaufgabe

$$(5.2) \qquad \frac{dy}{dx} + Ay = \lambda By, \quad R_0 y(0) + R_1 y(1) = \lambda [S_0 y(0) + S_1 y(1)]$$

unter der Voraussetzung, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist. Dann hat die Randwertaufgabe

$$(5.3) \qquad \frac{dz}{dx} + Az = y, \quad R_0 z(0) + R_1 z(1) = c$$

für jeden Vektor y aus Y und jeden konstanten Vektor $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ genau eine Lösung z aus Y. Sie läßt sich mit Hilfe der Greenschen Matrix U von n^2 stückweise stetigen Funktionen $u_{\alpha\beta}(x, \xi)$ in der Form

$$(5.4) \qquad z(x) = \int_0^1 U(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha v_{(\alpha)}(x)$$

darstellen (vgl. [1] B § 2, 6. 3); darin bedeutet $v_{(\alpha)}$ den Lösungsvektor der Randwertaufgabe (5. 3) für die rechten Seiten $y = 0$, $c = \alpha$-ter Einheitsvektor $= \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$. Schreiben wir (5. 4) kürzer

$$z = \mathfrak{U} y + \mathfrak{B} c,$$

so ist die vorgelegte Aufgabe (5. 2) gleichwertig zu

$$y = \lambda \mathfrak{K} y$$

mit

$$(5.5) \qquad \mathfrak{K} y = \mathfrak{U} B y + \mathfrak{B} [S_0 y(0) + S_1 y(1)].$$

$\mathfrak{R}$ ist ein System gemischter Integraloperatoren mit brauchbar unstetigen Teilkernen, also gelten für $\mathfrak{R}$ die Aussagen des vorigen Abschnitts.

Wir erklären Ordnung eines Eigenwertes von (5. 2) und Beteiligung an einem gegebenen Vektor durch die entsprechenden Begriffe für (5. 5). Dann gilt der

Satz: *Die s ersten Eigenwerte von* (5. 2) *seien von der Ordnung* 1, *und es sei* $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_s| < |\lambda_{s+1}|$. *Man bestimme nacheinander für* $\sigma = 1, \ldots, s$ *einen Vektor* f_σ *aus* Y, *ein lineares Funktional* $\mathfrak{g}_\sigma y$ *und den zugehörigen Orthogonalisierungsprozeß* $\mathfrak{O}_\sigma$ *wie folgt: Mit einem beliebigen Ausgangsvektor* $y_\sigma^{(0)}$ *aus* Y, *an dem der Eigenwert* λ_σ *beteiligt ist, werden nach der Iterationsvorschrift*

$$t_\sigma^{(\nu-1)} = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \ldots \mathfrak{O}_{\sigma-1}\, y_\sigma^{(\nu-1)},$$

$$\frac{d\, y_\sigma^{(\nu)}}{d\, x} + A\, y_\sigma^{(\nu)} = B\, t_\sigma^{(\nu-1)}, \qquad R_0\, y_\sigma^{(\nu)}(0) + R_1\, y_\sigma^{(\nu)}(1) = S_0\, t_\sigma^{(\nu-1)}(0) + S_1\, t_\sigma^{(\nu-1)}(1)$$

die Vektoren $y_\sigma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *gebildet (für* $\sigma = 1$ *ist* $\mathfrak{O}_1 \ldots \mathfrak{O}_{\sigma-1} = 1$ *zu setzen); sie konvergieren, samt erster Ableitung, bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen einen Vektor* f_σ *aus* Y. *Man wählt ein lineares Funktional*

$$\mathfrak{g}_\sigma y = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \int_0^1 g_{\sigma\alpha}(\xi)\, y_\alpha(\xi)\, d\xi + \sum_{\varrho=1}^{r_\sigma} c_{\sigma\varrho\alpha}\, y_\alpha(x_{\sigma\varrho}) \right\},$$

wobei die n *stetigen Funktionen* $g_{\sigma\alpha}(\xi)$, *die ganze Zahl* $r_\sigma \geqq 0$, *die* $n \cdot r_\sigma$ *Konstanten* $c_{\sigma\varrho\alpha}$ *und die* r_σ *Stellen* $x_{\sigma\varrho}$ *des Intervalls* $0 \leqq x_{\sigma\varrho} \leqq 1$ *nur der Einschränkung* $\mathfrak{g}_\sigma f_\sigma = 1$ *unterworfen sind. Man setzt*

$$\mathfrak{O}_\sigma y = y(x) - f_\sigma(x) \cdot (\mathfrak{g}_\sigma y).$$

Dann gilt für jede Komponente $y_{\sigma\alpha}^{(\nu)}(x)$ *von* $y_\sigma^{(\nu)}$:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{y_{\sigma\alpha}^{(\nu-1)}(x)}{y_{\sigma\alpha}^{(\nu)}(x)} = \lambda_\sigma \tag{5.6}$$

gleichmäßig für alle x, *für welche* $|f_{\sigma\alpha}(x)| > \varepsilon > 0$ *bleibt mit beliebigem festem* ε. *Der Eigenvektor* e_σ *von* (5. 2) *zu* λ_σ *bestimmt sich als Linearverbindung von* $f_1, \ldots, f_\sigma$:

$$e_\sigma = \left(1 + \frac{\lambda_\sigma}{\lambda_1 - \lambda_\sigma} f_1 \mathfrak{g}_1\right) \ldots \left(1 + \frac{\lambda_\sigma}{\lambda_{\sigma-1} - \lambda_\sigma} f_{\sigma-1} \mathfrak{g}_{\sigma-1}\right) f_\sigma.$$

Gibt es keinen $(s+1)$*-ten Eigenwert, so existiert der Grenzwert* (5. 6) *für keine Wahl von* $y_{s+1}^{(0)}$, x *und* α: *Entweder verschwinden unendlich viele Nenner, oder die Quotientenfolge ist unbeschränkt.*

Beweis. Die angegebene Iterationsvorschrift besagt nichts anderes als $y_\sigma^{(\nu)} = \mathfrak{R}\, \mathfrak{O}_1 \ldots \mathfrak{O}_{\sigma-1}\, y_\sigma^{(\nu-1)}$, so daß wir auf den Satz von 5 A zurückkommen. Zwar war der dort benutzte Raum Y weiter als der jetzt zugrunde

gelegte, weil er alle stetigen Vektoren umfaßte. Das stört aber nicht; denn jeder Hauptvektor des jetzt betrachteten Operators $\mathfrak{R}$ von (5. 5) ist stetig differenzierbar. Nach 5 A konvergieren zunächst nur die Vektoren $y_\sigma^{(\nu)}$ selbst. Dies zieht aber auf Grund der Iterationsvorschrift die Konvergenz der ersten Ableitung nach sich. Die Formel für e_σ folgt aus (3. 16).

(5 B b). *Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.* Es seien

$$\mathfrak{A}z \equiv \frac{d^n z}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)\,z \qquad (n \geqq 1),$$

$$\mathfrak{B}z \equiv \qquad b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + b_0(x)\,z$$

Differentialausdrücke in $z = z(x)$ mit stetigen Koeffizienten und

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_\alpha z &= \sum_{\beta=1}^{n}\left\{r_{0\alpha\beta}\frac{d^{\beta-1}z}{dx^{\beta-1}}\Big|_{x=0} + r_{1\alpha\beta}\frac{d^{\beta-1}z}{dx^{\beta-1}}\Big|_{x=1}\right\}, \\ \mathfrak{s}_\alpha z &= \sum_{\beta=1}^{n}\left\{s_{0\alpha\beta}\frac{d^{\beta-1}z}{dx^{\beta-1}}\Big|_{x=0} + s_{1\alpha\beta}\frac{d^{\beta-1}z}{dx^{\beta-1}}\Big|_{x=1}\right\} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$2n$ Randausdrücke mit konstanten Koeffizienten. Unter Z verstehen wir die Gesamtheit der für $0 \leqq x \leqq 1$ n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $z(x)$. Die ersten s Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ der Aufgabe

$$\mathfrak{A}z = \lambda\,\mathfrak{B}z, \quad \mathfrak{r}_\alpha z = \lambda\,\mathfrak{s}_\alpha z \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{5. 7}$$

seien von der Ordnung 1 (in dem unten erklärten Sinne), und es sei $0 < |\lambda_1| < \cdots < |\lambda_s| < |\lambda_{s+1}|$. Dann gilt der

Satz: *Man erhält die Lösungen von* (5. 7) *durch ein entsprechendes Verfahren wie in* 5 Ba. *Die Iterationsvorschrift, nach der für* $\sigma = 1, \ldots, s$ *der Reihe nach eine Funktion* $\widetilde{f}_\sigma(x)$, *ein lineares Funktional* $\widetilde{\mathfrak{g}}_\sigma$ *und ein Orthogonalisierungsoperator* $\widetilde{\mathfrak{O}}_\sigma$ *zu bestimmen sind, lautet hier: Mit einer beliebigen Ausgangsfunktion* $z_\sigma^{(0)}$ *aus* Z, *an der* λ_σ *beteiligt ist, werden gemäß*

$$\mathfrak{A}z_\sigma^{(\nu)} = \mathfrak{B}u_\sigma^{(\nu-1)}, \quad \mathfrak{r}_\alpha z_\sigma^{(\nu)} = \mathfrak{s}_\alpha u_\sigma^{(\nu-1)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

mit

$$u_\sigma^{(\nu-1)} = \widetilde{\mathfrak{O}}_1 \ldots \widetilde{\mathfrak{O}}_{\sigma-1} z_\sigma^{(\nu-1)}$$

die Funktionen $z_\sigma^{(\nu)}$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots$ *gebildet. Sie konvergieren samt ihren ersten n Ableitungen bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen eine n-mal stetig differenzierbare Funktion* $\widetilde{f}_\sigma$. *Man wählt ein lineares Funktional*

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_\sigma z = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\int_0^1 \widetilde{g}_{\sigma\alpha}(\xi)\frac{d^{\alpha-1}z(\xi)}{d\xi^{\alpha-1}}\,d\xi + \sum_{\varrho=1}^{r_\sigma}\widetilde{c}_{\sigma\varrho\alpha}\frac{d^{\alpha-1}z(x)}{dx^{\alpha-1}}\Big|_{x=x_\varrho}\right\} \tag{5. 8}$$

mit stetigen Koeffizienten $\tilde{g}_{\sigma\alpha}$ *und Konstanten* $\tilde{c}_{\sigma\varrho\alpha}$, *die der einzigen Einschränkung* $\tilde{g}_\sigma \tilde{f}_\sigma = 1$ *unterworfen sind; dann setzt man* $\tilde{\mathfrak{D}}_\sigma = 1 - \tilde{f}_\sigma \tilde{g}_\sigma$.

Beweis. Wir führen die Differentialgleichung n-ter Ordnung in bekannter Weise auf ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurück, indem wir den Raum Y aller Vektoren mit n stetig differenzierbaren Komponenten heranziehen und jeder Funktion z aus Z den Vektor $y = \mathfrak{Y} z$ aus Y mit den Komponenten

$$(\mathfrak{Y} z)_\alpha = \frac{d^{\alpha-1} z}{d x^{\alpha-1}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

zuordnen. Die Randbedingung von (5. 7) schreibt sich dann mit vier konstanten Matrizen $R_0 = (r_{0\alpha\beta}), \ldots, S_1 = (s_{1\alpha\beta})$ in der Form (5. 2):

$$R_0 y(0) + R_1 y(1) = \lambda [S_0 y(0) + S_1 y(1)].$$

Besteht die Beziehung

$$\mathfrak{A} z_1 = \mathfrak{B} z_0$$

zwischen zwei Funktionen aus Z, so gilt für $y_i = \mathfrak{Y} z_i$ die Gleichung

$$\frac{d y_1}{d x} + A y_1 = B y_0 \tag{5. 9}$$

mit den n-reihigen Matrizen

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5. 10}$$

Gilt umgekehrt (5. 9) für zwei Elemente y_0, y_1 aus Y, so hat y_1 die Gestalt $y_1 = \mathfrak{Y} z_1$, und falls außerdem $y_0 = \mathfrak{Y} z_0$ ist, folgt $\mathfrak{A} z_1 = \mathfrak{B} z_0$. Daher hat die Aufgabe (5. 7) dieselben Eigenwerte wie die Aufgabe (5. 2), gebildet mit den Matrizen (5. 10); die Eigenlösungen hängen durch $y = \mathfrak{Y} z$ zusammen. Wir definieren daher: λ heißt an der Funktion $z(x)$ hinsichtlich der Aufgabe (5. 7) beteiligt, wenn λ an dem Vektor $\mathfrak{Y} z$ hinsichtlich (5. 2) beteiligt ist; wir setzen $Ord_{(5.7)} \lambda = Ord_{(5.2)} \lambda$.

Wir wenden den Satz von 5 Ba an, und zwar beginnen wir die Iteration mit dem Ausgangsvektor $y_1^{(0)} = \mathfrak{Y} z_1^{(0)}$. Nach 5 Ba wird

$$\frac{d y_1^{(1)}}{d x} + A y_1^{(1)} = B y_1^{(0)}, \quad R_0 y_1^{(1)}(0) + R_1 y_1^{(1)}(1) = S_0 y_1^{(0)}(0) + S_1 y_1^{(0)}(1);$$

also hat $y_1^{(1)}$ die Gestalt $y_1^{(1)} = \mathfrak{Y} z$ mit

$$\mathfrak{A} z = \mathfrak{B} z_1^{(0)}, \quad \mathfrak{r}_\alpha z = \mathfrak{s}_\alpha z_1^{(0)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Folglich ist $z = z_1^{(1)}$, d. h. es ist

$$y_1^{(\nu)} = \mathfrak{P}\, z_1^{(\nu)}$$

für $\nu = 1$; dasselbe ergibt sich für $\nu = 2, 3, \ldots$. Nach 5 Ba konvergiert $\mathfrak{P}\, z_1^{(\nu)}$ bis auf Proportionalität gleichmäßig gegen einen Vektor $f_1 = \{\widetilde{f}_1, \widetilde{g}_1, \ldots\}$ aus Y, insbesondere die erste Komponente $z_1^{(\nu)}$ gegen $\widetilde{f}_1$, ferner $\frac{d}{dx} z_1^{(\nu)}$ gegen $\widetilde{g}_1$; also ist $\widetilde{g}_1 = \frac{d}{dx} \widetilde{f}_1$ usw.: es ist $f_1 = \mathfrak{P}\, \widetilde{f}_1$.

Nun wählen wir in Satz 5 Ba die Koeffizienten $g_{1\alpha}(\xi)$, $c_{1\varrho\alpha}$ von $\mathfrak{g}_1$ gleich den durch (5. 8) gegebenen entsprechenden Koeffizienten von $\widetilde{\mathfrak{g}}_1$. Dann haben wir $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{P}\, z = \widetilde{\mathfrak{g}}_1 z$, daher wird $\mathfrak{g}_1 f_1 = \mathfrak{g}_1 \mathfrak{P}\, \widetilde{f}_1 = \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \widetilde{f}_1 = 1$ und

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P}\, z = \mathfrak{P}\, z - \mathfrak{P}\, \widetilde{f}_1 \cdot (\widetilde{\mathfrak{g}}_1 z) = \mathfrak{P}\, \widetilde{\mathfrak{D}}_1 z.$$

Beginnt man die Iteration für λ_2 mit $y_2^{(0)} = \mathfrak{P}\, z_2^{(0)}$, so folgt aus

$$\frac{d\, y_2^{(\nu)}}{dx} + A\, y_2^{(\nu)} = B\, \mathfrak{D}_1\, y_2^{(\nu-1)} = B\, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{P} z_2^{(\nu-1)} = B \mathfrak{P}\, \widetilde{\mathfrak{D}}_1 z_2^{(\nu-1)}$$

und den Randbedingungen wie oben, daß für alle ν $y_2^{(\nu)} = \mathfrak{P}\, z_2^{(\nu)}$ ist, usw. Damit ist der Beweis beendet.

Man darf diesen Satz nach 3 Cd auf $\widetilde{\mathfrak{g}}_1 z = \cdots = \widetilde{\mathfrak{g}}_s z = z\,(x_0)$ anwenden, wenn x_0 eine feste Stelle mit der Eigenschaft $e_1(x_0) \cdots e_s(x_0) \neq 0$ ist. Man erhält dann das in der Einleitung erwähnte Beispiel (1. 3).

5 C. *Ergänzungen.* (a) Vor der Berechnung des zweiten Eigenwertes muß man sich für einen Orthogonalisierungsprozeß $\mathfrak{O}$ entscheiden. Beim Vergleich der zahlreichen in (5. 8) liegenden Möglichkeiten sind folgen Gesichtspunkte von Bedeutung:

α) Der Arbeitsaufwand der Orthogonalisierung soll nicht groß sein.

β) Die Eigenlösungen des abgeänderten Operators $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}\, \mathfrak{O}$ sollen voneinander möglichst linear unabhängig sein.

γ) Der abgeänderte Operator soll nicht zu „groß“ ausfallen, z. B. ein Integraloperator mit möglichst kleinem Kern sein, damit bei der folgenden Iteration keine Differenzen großer Zahlen auftreten.

δ) Die erste Eigenlösung f_2 des abgeänderten Operators soll von der schon bestimmten Eigenlösung e_1 des ursprünglichen möglichst unabhängig sein, damit die zweite Eigenlösung e_2 als Linearverbindung von e_1 und f_2 nicht zu ungenau ausfällt.

Die Forderung α wird durch die Wahl $\mathfrak{g}\, y = y\,(x_0)$ erfüllt. Doch wird bei den höheren Eigenwerten die Genauigkeit leiden, wenigstens wenn man zur Vereinfachung immer dasselbe x_0 nimmt. Die Aufgabe β ist schwer genau zu fassen und kaum allgemein zu lösen. Dagegen lassen die Forderungen γ

und δ eine übereinstimmende optimale Lösung zu. Wir halten uns an den Fall eines gewöhnlichen Integraloperators mit dem Kern $K(x, \xi)$. In dem abgeänderten Kern

$$K^*(x, \xi) = K(x, \xi) - e_1(x)\, g(\xi)$$

können wir e_1 auf $\int |e_1(\xi)|^2 d\xi = 1$ normiert annehmen. Der Kern K_0^*, gebildet mit

$$g_0(x) = \int_0^1 K(\xi, x)\, \bar{e}_1(\xi)\, d\xi,$$

ist im Quadratmittel kleiner als jeder andere. In der Tat ergibt sich in leichter Rechnung

$$\int_0^1\int_0^1 |K^*(x, \xi)|^2 dx\, d\xi = \int_0^1\int_0^1 |K_0^*(x, \xi)|^2 dx\, d\xi + \int_0^1 |g(\xi) - g_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Dieser Kern K_0^* ist uns schon beim Beispiel 3 Dc begegnet (3. 21). Wir können daher feststellen: Hinsichtlich der Kleinheitsforderung γ optimal ist die Abänderungsvorschrift

$$\mathfrak{K}^* = (\mathfrak{1} - e_1 \mathfrak{g})\, \mathfrak{K} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{g}\, y = \int_0^1 \bar{e}_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi, \quad \mathfrak{g}\, e_1 = 1.$$

Wie in 3 Dc gezeigt wurde, entstehen die höheren abgeänderten Eigenfunktionen f_σ durch den Schmidtschen Orthogonalisierungsprozeß aus den ursprünglichen Eigenfunktionen e_σ, sind somit paarweise orthogonal. Daher ist auch die Unabhängigkeitsforderung δ bestens erfüllt. Hinsichtlich der Genauigkeit ist es also vorteilhaft, als Orthogonalisierungsgewichte die Eigenfunktionen e_σ selbst zu verwenden und die Orthogonalisierung nach der Integration auszuführen, wenn möglich mit dieser zu einem einzigen Integrationsprozeß vereinigt. Auf die letzte Forderung wird man allerdings bei Differentialgleichungen in der Regel verzichten müssen; bei Integralgleichungen ist sie leicht zu erfüllen und führt überdies zu einer Verminderung des Arbeitsaufwandes.

(5 Cb). Wenn es mehr auf die Eigenwerte als die Eigenfunktionen ankommt, wird man die Iteration nicht so lange fortsetzen, bis die Iterierten im Rahmen der verlangten Stellenzahl genau proportional werden, sondern vorher abbrechen und die Genauigkeit des Eigenwertes durch Mittelbildung erhöhen. Es kommt darauf an, den Anteil des gesuchten Eigenwertes an den Iterierten hervorzuheben. (Im selbstadjungierten Fall benutzt man hierzu die Orthogonalität der Eigenlösungen (Verfahren von Galerkin); der allgemeine Fall ist noch nicht genügend untersucht.) Die Frage, in welcher

Weise dies am besten geschieht, soll hier nicht erörtert werden. Die Betrachtungen des vorigen Abschnitts legen Ansätze wie

$$\frac{1}{\lambda_1} \approx \frac{\iint y_1^{(\nu)}(x)\, K(\xi, x)\, \bar{y}_1^{(\nu)}(\xi)\, dx\, d\xi}{\int |y_1^{(\nu)}(\xi)|^2\, d\xi} = \frac{\int y_1^{(\nu+1)}(\xi)\, \bar{y}_1^{(\nu)}(\xi)\, d\xi}{\int |y_1^{(\nu)}(\xi)|^2\, d\xi}$$

nahe.

(5 Cc). Beim Iterationsverfahren wird vorausgesetzt, daß der gesuchte erste Eigenwert an der Ausgangsfunktion $y^{(0)}$ beteiligt ist. Ob dies für ein vorgelegtes $y^{(0)}$ wirklich der Fall ist, kann man ihm im allgemeinen nicht ansehen. Bei der praktischen Rechnung stört das aber nicht; denn wenn ein Integraloperator überhaupt einen Eigenwert besitzt, sind diejenigen Funktionen $y^{(0)}$, an welchen dieser Eigenwert unbeteiligt ist, im Vergleich zu den anderen verschwindend selten. Eine leichte Rechnung [vgl. (3. 22)] zeigt nämlich, daß sie orthogonal sein müssen zu allen Hauptlösungen des adjungierten Operators zum konjugiert komplexen Eigenwert. Man darf sich also in der Praxis darauf verlassen, daß das Iterationsverfahren immer den ersten unter den noch unbekannten Eigenwerten ergibt, wie man auch die Ausgangsfunktion gewählt hat. Ausgenommen sind nur triviale, auf der Hand liegende Fälle wie die Ausgangsfunktion $y^{(0)} = 1$ bei Differentialgleichungen der Gestalt $\mathfrak{A}\, y = \lambda\, y'$, $\mathfrak{r}_\alpha y = 0$; hier sind alle Iterierten $y^{(\nu)} = 0$; $y^{(0)}$ ist für den zugehörigen Integraloperator Eigenlösung zum Eigenwert $\varkappa = 0$.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man von vornherein Ausgangsfunktionen angeben, an denen jeder überhaupt vorhandene Eigenwert beteiligt sein muß. Als Beispiel behandeln wir die Aufgabe (1. 1):

$$y'' = \lambda\, g(x)\, y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Da die Lösung von $y'' = u$, $y(0) = y(1) = 0$ gegeben ist durch

$$y = \mathfrak{G}\, u = \int_0^1 G(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \quad \text{mit} \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \xi\,(x-1) & \text{für } \xi \leqq x, \\ x\,(\xi - 1) & \text{für } x \leqq \xi, \end{cases}$$

ist (1. 1) gleichwertig der Eigenwertaufgabe für den Integraloperator $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}\, g$ mit dem Kern $K(x, \xi) = G(x, \xi)\, g(\xi)$, und der adjungierte Operator ist $\mathfrak{K}_a = \bar{g}\, \mathfrak{G}$ mit dem Kern $\overline{K}(\xi, x) = \bar{g}(x)\, G(x, \xi)$. Die adjungierten Eigenlösungen $e(x)$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ sind gekennzeichnet durch $e = \bar{\lambda}\bar{g}\, \mathfrak{G}\, e$. Daher genügt die Funktion $f = \mathfrak{G}\, e$ der Gleichung $f = \bar{\lambda}\, \mathfrak{G}\, \bar{g} f$, d. h. es ist

$$f'' = \bar{\lambda}\, \bar{g}(x)\, f, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Da $f \not\equiv 0$, können nicht alle Anfangswerte von f verschwinden, z. B. ist $f'(1) \neq 0$. Nun folgt aus $\mathfrak{G}\, e = f$ durch Differenzieren für $x = 1$:

$$\int_0^1 \xi\, e(\xi)\, d\xi = f'(1) \neq 0.$$

Die Funktion x ist also zu keiner Eigenfunktion von $\overline{K}(\xi, x)$ orthogonal, daher ist an ihr jeder Eigenwert von (1. 1) beteiligt. Demnach kann $y_0^{(0)} = x$ als Ausgangsfunktion zur Berechnung aller möglicherweise vorhandenen Eigenwerte λ_σ von (1. 1) dienen.

(5 Cd). Eine grundsätzliche Frage, auch für die Anwendungen von Bedeutung, ist die nach der Zuverlässigkeit der Näherungsergebnisse. Ihre Beantwortung erfordert einen Einschließungssatz: Man setzt voraus, daß eine bekannte Funktion z und eine bekannte Zahl λ zusammen die Aufgabe (5. 7) bis auf einen abschätzbaren Fehler erfüllen, und fragt nach einem beschränkten Gebiet um λ, das mit Sicherheit einen Eigenwert enthält. Der Konvergenzsatz bietet keine Möglichkeit, nach endlich vielen Iterationsschritten zu entscheiden, ob auch nur ein einziger Eigenwert existiert, geschweige denn eine Schranke für ihn anzugeben. Dies soll in einer folgenden Arbeit geschehen.

(5 Ce). *Durchführung des Iterationsverfahrens.* Aus der Fülle der möglichen Anordnungen soll im folgenden eine beschrieben werden, die sich bei technischen Aufgaben bewährt hat.

Es ist zweckmäßig, die Iterierten nach jedem Schritt zu normieren. Die angenäherte Übereinstimmung der Rechnung bei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten gestattet eine sichere Kontrolle und Beurteilung der Zuverlässigkeit. Man normiert am bequemsten den Funktionswert an einer festen Stelle x_1 auf 1, bei Vektoren eine feste Komponente. Man berechnet also, von einer normierten Funktion $z_0(x)$ ausgehend, die Folge $z_\nu(x)$ der normierten Iterierten nach der Vorschrift

$$z_\nu(x) = \frac{1}{k_\nu} \Re z_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{5.11}$$
$$k_\nu = [\Re z_{\nu-1}]_{x=x_1}.$$

Als Näherung für den ersten Eigenwert und die erste Eigenlösung erhält man nach s Schritten

$$\frac{1}{\lambda_1} = \varkappa_1 \approx k_s, \qquad e_1 \approx z_s. \tag{5.12}$$

Die Konvergenz ist asymptotisch so gut wie die von $\sum (\varkappa_2/\varkappa_1)^\nu$. Erweist sie sich als langsam, aber regelmäßig, so versucht man sie durch Anwendung der Transformation (4. 27) zu verbessern. Ein wenig mühsamer, aber mitunter erheblich wirksamer, namentlich im Fall $|\varkappa_1| \approx |\varkappa_2| \gg |\varkappa_3|$, ist die Methode der quadratischen Näherungsgleichung (s. u.). Sie führt auch im Fall $|\varkappa_1| = |\varkappa_2|$ zum Ziel, wenn nicht weitere Komplikationen eintreten.

Zur rohen Bestimmung des zweiten Eigenwertes hat man die aus dem Konvergenzsatz leicht herzuleitende Faustformel

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \approx \frac{k_s - k_{s-1}}{k_{s-1} - k_{s-2}}. \tag{5.13}$$

Sie genügt oft zur Entscheidung der Frage, ob der zweite Eigenwert für die vorliegende Aufgabe überhaupt noch von Belang ist. Ist dies der Fall, so bestimmt man ihn genauer aus einer quadratischen Näherungsgleichung. Eine solche erhält man, bequemer als nach der in 4 Dd erwähnten Methode der kleinsten Quadrate, indem man aus

$$z_s - z_{s-1} \approx p_s \cdot (z_{s-1} - z_{s-2}) \tag{5.14}$$

einen (konstanten) Proportionalitätsfaktor p_s ermittelt. Dies geschieht am einfachsten gemäß

$$p_s = \frac{z_s(x_2) - z_{s-1}(x_2)}{z_{s-1}(x_2) - z_{s-2}(x_2)}, \tag{5.15}$$

wobei der Nenner an der im übrigen beliebig zu wählenden Stelle x_2 groß ausfallen soll. Die Genauigkeit, mit der (5.14) gilt, ist ein Maßstab für die Zuverlässigkeit der zu erwartenden Ergebnisse. (5.14) gilt exakt, wenn die z_ν Linearverbindungen der beiden ersten Eigenlösungen sind, und in diesem Fall wird auch die quadratische Näherungsgleichung exakt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ erfüllt. Sie lautet

$$x^2 - (1 + p_s) k_s x + p_s k_{s-1} k_s = 0. \tag{5.16}$$

Noch ohne sie genau zu lösen, erhält man aus ihrem Absolutglied zusammen mit (5.12) für $\varkappa_2$ die Näherung

$$\varkappa_2 \approx p_s k_{s-1}. \tag{5.17}$$

Dieser Wert ist gewöhnlich weit besser als (5.13); er ergibt sich auch aus der Determinantenmethode 4 De. Die exakte Lösung von (5.16), namentlich im Komplexen verhältnismäßig mühsam, ist nur dann nicht zu umgehen, wenn die Folge k_ν besonders schlecht konvergiert. Meist genügt es aber, von den schon vorhandenen Näherungswerten (5.12) und (5.17) aus einen Schritt des Newtonschen Verbesserungsverfahrens durchzuführen. Er ergibt die Formeln

$$\varkappa_1 \approx \frac{k_s - p_s k_{s-1}}{1 - p_s}, \qquad \varkappa_2 \approx p_s k_{s-1} \cdot \frac{k_s - p_s k_{s-1}}{(1+p_s) k_s - 2 p_s k_{s-1}}. \tag{5.18}$$

Bestimmen die bisher beschriebenen vereinfachten Methoden $\varkappa_2$ nicht zuverlässig, so beraubt man den zugrunde liegenden Operator $\mathfrak{K}$ gemäß 3 A seines Eigenwertes $\varkappa_1$ und stellt mit Hilfe des abgeänderten Operators $\mathfrak{K}^*$ eine neue Iterationsfolge $u_\nu(x)$ von der Art (5.11) auf. Es ist vorteilhaft, zur Abänderung das Funktional $\mathfrak{g}\, y = y(x_1)$ zu benutzen, mit dem in (5.11) festgelegten Wert von x_1, und den zugehörigen Orthogonalisierungsprozeß erst nach $\mathfrak{K}$ auszuführen:

$$u_\nu(x) = \frac{1}{l_\nu}(1 - e_1 \mathfrak{g})\, \mathfrak{K} u_{\nu-1} = \frac{1}{l_\nu}\left(\mathfrak{K} u_{\nu-1} - e_1(x)\, [\mathfrak{K} u_{\nu-1}]_{x=x_1}\right), \tag{5.19}$$

$$u_\nu(x_2) = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Der Vorteil besteht darin, daß man von vornherein eine gute Ausgangsnäherung zur Verfügung hat, nämlich

$$u_0(x) = \frac{z_s(x) - z_{s-1}(x)}{z_s(x_2) - z_{s-1}(x_2)}. \tag{5.20}$$

Dies ist diejenige in x_2 normierte Linearverbindung von z_{s-1} und z_s, für welche $g\, u_0 = 0$ ist; sie stimmt nach 3 Ca mit der gesuchten ersten Eigenlösung von $\mathfrak{R}^*$ überein, falls z_{s-1} und z_s Linearverbindungen der beiden ersten Eigenlösungen von $\mathfrak{R}$ sind, was bei genügend großer Schrittzahl s näherungsweise erwartet werden darf. Mit den Folgen $u_\nu(x)$ und l_ν verfährt man weiter, wie oben für $z_\nu(x)$ und k_ν beschrieben. — Die höheren Eigenlösungen ergeben sich bei dieser Anordnung nicht so bequem wie die Eigenwerte. Am übersichtlichsten bestimmt man sie durch wiederholte Anwendung des Abänderungssatzes. Hat man z. B. den vierten Eigenwert durch zweimalige Abänderung von $\mathfrak{R}$ berechnet, also, in den Bezeichnungen von 3 Dc, als zweiten Eigenwert von $\mathfrak{R}_2$, und ist e_{24} die zugehörige Eigenlösung von $\mathfrak{R}_2$, so ist

$$e_4 = (\mathfrak{R} - \varkappa_1)(\mathfrak{R}_1 - \varkappa_2)\, e_{24}$$

die vierte Eigenlösung von $\mathfrak{R}$. Der Arbeitsaufwand wäre etwa zwei Iterationsschritten gleichzustellen, läßt sich aber durch Zurückgreifen auf die bereits zur Bestimmung von e_{24} durchgeführten Iterationen erniedrigen.

(5 Cf). *Zusammenstellung der Ergebnisse verschiedener Verfahren.* Um die Wirksamkeit der im vorigen Abschnitt erwähnten Methoden in einem für das einfache Iterationsverfahren ziemlich ungünstigen Fall vor Augen zu führen, sind im folgenden die nach ihnen berechneten Näherungen für die beiden ersten Eigenwerte des wiederholt behandelten Beispiels 4 Dd zusammengestellt. Jede Zeile bedeutet ein Verfahren, jede Spalte eine Schrittzahl s.

Näherungswerte für $\varkappa_1 = 4{,}0000$					
Verfahren	$s = 3$	4	5	6	7
(5.12)	4,730	4,463	4,311	4,217	4,1540
(4.27) (5.12)	4,463	4,217	4,111	4,060	4,0327
$(4.27)^2(5.12)$			4,033	4,010	4,0032
$(4.27)^3(5.12)$					4,0001
(5.16)	komplex	komplex	3,894	3,980	3,9954
(4.27) (5.16)	komplex	komplex	komplex	komplex	3,9987
(5.18)	−1,556	3,890	4,014	4,021	4,0150
(4.27) (5.18)		1,540	4,016	4,021	4,0176
$(4.27)^2(5.18)$				4,021	4,0192

Ein leeres Feld besagt, daß das Verfahren erst von einer höheren Schrittzahl an erklärt ist. Die gesamte Rechnung wurde achtstellig durchgeführt.

Die erste Zeile enthält die vom einfachen Iterationsverfahren (5. 12) gelieferten Werte. Diese werden in den folgenden drei Zeilen durch ein- bis dreimalige Anwendung der Transformation (4. 27) verbessert. Wie zu erwarten arbeitet das Verfahren bei höheren Schrittzahlen besonders gut. Der letzte sehr genaue Wert 4,0001 liegt an der Grenze der Leistungsfähigkeit einer achtstelligen Rechnung. Die nächste Zeile enthält die genauen Wurzeln der quadratischen Gleichung (5. 16). Die ersten Werte fallen komplex aus, was bei reellen, ungefähr gleichen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ leicht vorkommen kann. (In solchen Fällen bietet die sorgfältigere Aufstellung der quadratischen Gleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate Aussicht auf Abhilfe.) Die späteren Werte sind recht gut, was zum mindesten asymptotisch vorauszusehen war; sie müssen schließlich auch besser werden als die durch das Newtonsche Näherungsverfahren (5. 18) gelieferten. Zu Anfang aber sind diese letzteren, obwohl mit kleinerem Aufwand erhalten, merklich besser; sie sind natürlich von vornherein reell. Da sie keine monotone Konvergenz zeigen, ist von der Transformation (4. 27) nicht viel zu erhoffen. In der Tat bringt sie, wie die beiden letzten Zeilen zeigen, keine Verbesserung.

Näherungswerte für $\varkappa_2 = 3{,}0000$					
Verfahren	$s = 3$	4	5	6	7
(5. 13)	1,534	2,142	2,451	2,630	2,7423
(4. 27) (5. 13)			2,769	2,877	2,9321
$(4.27)^2(5.13)$					2,9915
(5. 17)	5,145	3,226	2,956	2,906	2,9096
(5. 16)	komplex	komplex	3,272	3,078	3,0251
(4. 27) (5. 16)	komplex	komplex	komplex	komplex	3,0053
(5. 18)	2,233	3,783	3,193	3,054	3,0140
(4. 27) (5. 18)		4,831	3,355	3,012	2,9975
$(4.27)^2(5.18)$				2,908	2,9969

Für $\varkappa_2$ sind zuerst die Werte der Faustformel (5. 13) aufgeführt; sie gewinnen durch die Transformation (4. 27) stark an Genauigkeit. Die von der Determinantenmethode (5. 17) gelieferten nicht schlechten Werte zeigen, daß durch unregelmäßige Konvergenz mitunter hohe Genauigkeit eines Näherungswertes vorgetäuscht werden kann, ähnlich wie bei den Näherungen (5. 18) für $\varkappa_1$. Die asymptotische Überlegenheit der exakten Lösung der quadratischen Gleichung (5. 16) gegenüber der Newtonschen Näherung (5. 18) tritt hier noch nicht einmal nach sieben Schritten in Erscheinung.

Alle angegebenen Näherungswerte für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind aus derselben Iterationsfolge gewonnen. Der Aufwand jedes einzelnen Verfahrens beträgt, namentlich bei Matrizen höherer Zeilenzahl oder bei Differentialgleichungen, nur einen Bruchteil des für einen Iterationsschritt notwendigen.

6. Schrifttum.

[1] Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig 1942.

[2] Collatz, Genäherte Berechnung von Eigenwerten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 19 (1939), S. 224—249, 297—318.

[3] Hohenemser, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik (Ergebn. d. Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, Heft 4). Berlin 1932.

[4] Hellinger u. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. (Encykl. d. math. Wiss. II C 13). Leipzig 1928.

[5] Wiarda, Integralgleichungen. Leipzig 1930.

[6] Frazer, Duncan u. Collar, Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations. Cambridge 1938.

[7] Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 46 (1926), S. 289—305.

[8] Kowalewski, Integralgleichungen. Berlin 1930.

[9] Hoheisel, Integralgleichungen. (Sammlung Göschen 1099). Berlin 1936.

[10] Perron, Zur Theorie der Matrices. Math. Annalen 64 (1907), S. 248—263.

[11] Lösch, Zur praktischen Berechnung der Eigenwerte linearer Integralgleichungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. (voraussichtlich) 23 (1944).

(Eingegangen am 30. Oktober 1943.)

Bemerkung über Abhängigkeit von Funktionen.

Von

Georg Aumann in Frankfurt a. M. und Otto Haupt in Erlangen.

1. Zusammenfassung.

1.1. Nach einem bekannten Satz[1]) sind (eindeutige) reelle Funktionen $f_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $\nu = 1, \ldots, n$, in der abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{D}$ einer kompakten, offenen Punktmenge $\mathfrak{D}$ abhängig, wenn sie [Vor. (1)] überall in $\mathfrak{D}$ differenzierbar sind und wenn [Vor. (2)] die Funktionaldeterminante J der f_ν überall in $\mathfrak{D}$ verschwindet. Umgekehrt folgt aus der Abhängigkeit der f_ν, daß $J = 0$ ist überall in $\mathfrak{D}$, falls man die f_ν als *stetig* differenzierbar in $\mathfrak{D}$ voraussetzt [Vor. (1′)].

Ausgangspunkt der nachstehenden Bemerkung sind die folgenden, wie es scheint noch nicht hervorgehobenen Feststellungen: Es bleibt der eingangs genannte *Satz* richtig auch bei Ersetzung der Vor. (2) durch die *schwächere Forderung*, daß J *fast überall Null sei in* $\mathfrak{D}$. Ferner bleibt die erwähnte *Umkehrung* richtig auch bei Ersetzung der Vor. (1′) durch die etwas *schwächere* Forderung, daß die f_ν überall in $\mathfrak{D}$ *lediglich differenzierbar* seien und *daß* $|J|$ *unterhalb stetig sei auf dem Rand von* $\mathfrak{D}$. Schließlich genügt es, im Satz und seiner Umkehrung die f_ν als *„in bezug auf Abhängigkeit"* (kurz: *i. b. a. A.*) *„im wesentlichen" differenzierbar* in $\mathfrak{D}$ vorauszusetzen, d. h. anzunehmen, daß die Menge der Punkte $X = (x_1, \ldots, x_n)$, in welchen nicht sämtliche f_ν in $\mathfrak{D}$ differenzierbar sind, vermöge der durch die f_ν definierten Abbildung $P' = f(P)$ eine Nullmenge als Bild besitzt (vgl. Nr. 4. 2). — Übrigens ist *jede in* $\mathfrak{D}$ *i. b. a. A. im wesentlichen differenzierbare Abbildung meßbar* (vgl. Nr. 4. 2). — *Beispiele* von i. b. a. A. im wesentlichen differenzierbaren Funktionen werden geliefert durch die *Funktionen von beschränkter Dehnung*; für diese ist somit das (verschärfte) Abhängigkeitskriterium anwendbar (vgl. Nr. 4. 3).

Auf den Fall der Abhängigkeit von k Funktionen in n Veränderlichen mit $n \neq k$ hoffen wir später zurückzukommen.

---

[1]) K. Knopp u. R. Schmidt, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 373ff.; vgl. ferner A. Ostrowski, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. Jahresber. d. Dtsch. Math. Ver. 36 (1927), S. 129ff; weitere Literatur bei Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, II. Bd., S. 166. Berlin 1938. — Der Artikel von P. Lévy, A propos du théorème fondamental de la théorie des Jacobiens. L'enseignement math. 38 (1939—1942), S. 218ff bezieht sich, soviel wir sehen können, im wesentlichen nur auf bekannte Ergebnisse.

1.2. Der Beweis des in Nr. 1.1. angegebenen Abhängigkeitskriteriums benutzt von Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen lediglich die, daß die Funktionaldeterminante (existiert und) ihrem Betrage nach gleich ist der lokalen Volumverzerrung der Abbildung (wenigstens in den inneren Punkten von $\mathfrak{D}$ (vgl. Nr. 4.1.1.)). Dementsprechend läßt sich die Forderung, die Abbildung solle im wesentlichen differenzierbar sein, abschwächen zur Forderung, daß die Abbildung „i. b. a. A. im wesentlichen" endliche, lokale (untere) Volumverzerrung besitze (vgl. Nr. 3.2). Die hiermit angedeutete Verallgemeinerung des Abhängigkeitssatzes ergibt sich ihrerseits aus allgemeinen Aussagen über eindeutige stetige Abbildungen. Diese Aussagen sind, wie wir bemerkten, der Hauptsache nach schon in Sätzen von Herrn RADEMACHER [2]) enthalten. Dabei werden die betrachteten Abbildungen von Herrn RADEMACHER allerdings als umkehrbar-eindeutig vorausgesetzt; aber seine Beweise für die von uns benutzten Tatsachen gelten auch für eindeutige Abbildungen. Es mag daher gerechtfertigt erscheinen, wenn wir nachstehend (Nr. 2.2 und 2.4) die hiernach einschlägigen Sätze nochmals (mit Beweisen) zusammenstellen.

1.3. Bei den vorstehend referierten Betrachtungen handelt es sich ausschließlich um Abbildungen eines euklidischen Raumes in einen (gleichdimensionalen) euklidischen Raum. Verallgemeinerungen auf Abbildungen abstrakter Räume werden am Schlusse (Nr. 5.1 ff.) angedeutet.

2. Nullmengentreue (eindeutige) Abbildungen im E_n.

2.1. Die Abbildung $x'_\varkappa = f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n), \varkappa = 1, \ldots, k$, kurz: $P' = f(P)$, sei in einer nicht-leeren Punktmenge $\mathfrak{G}$ des euklidischen E_n der $P = (x_1, \ldots, x_n)$ erklärt und eindeutig; der im euklidischen E'_k der $P' = (x'_1, \ldots, x'_k)$ gelegene Bildbereich von $\mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{G}' = f(\mathfrak{G})$; die $f_\varkappa(P)$ sollen also überall in $\mathfrak{G}$ eindeutig, reell und endlich sein. Das LEBESGUEsche n- bzw. k-dimensionale Maß im E_n bzw. E'_k sei mit L_n bzw. L'_k bezeichnet, das entsprechende äußere Maß mit $\bar{L}_n$ bzw. $\bar{L}'_k$. Schließlich *werde* $\mathfrak{G}$ *als* L_n*-meßbar angenommen.*

Die Abbildung heiße nullmengentreu, wenn das Bild jeder L_n-Nullmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ eine L'_k-Nullmenge ist, also $L'_k(f(\mathfrak{M})) = 0$, wenn $L_n(\mathfrak{M}) = 0$.

Es sei jetzt in jedem Punkt $P \in \mathfrak{G}$ ein (nicht-leeres) System $\mathfrak{w}(P)$ von achsenparallelen offenen (oder abgeschlossenen) Würfeln $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(P)$ gegeben, welche P als Mittelpunkt besitzen und unter deren Kantenlängen $s = s(\mathfrak{W}) > 0$ beliebig kleine vorkommen. Man setze $V' = \bar{L}'_k(f(\mathfrak{W}\mathfrak{G}))$ und $V = L_n(\mathfrak{W}\mathfrak{G})$, ferner $q(\mathfrak{W}; f; \mathfrak{G}) = q(\mathfrak{W}) = V' : V$, falls $V \neq 0$ bzw.

---

[2]) H. RADEMACHER, Ein-eindeutige Abbildungen und Meßbarkeit. Diss. Göttingen 1917 = Monatshefte f. Math. u. Phys. 27 (1916), S. 183ff.

$q(\mathfrak{W}) = 0$, falls $V' = V = 0$ (vgl. Nr. 2. 2. 1) bzw. $q(\mathfrak{W}) = +\infty$, falls $V' > 0$, $V = 0$. Dann ist $q(\mathfrak{W}) = q(\mathfrak{W}; f; \mathfrak{G})$ bei festem P eine reelle, nichtnegative Funktion $q(s)$ von s. Wir setzen jetzt

$$\bar{v}(P; f; \mathfrak{G}) = \overline{\lim_{s \to 0}}\, q(s) \quad \text{und} \quad \underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = \underline{\lim_{s \to 0}}\, q(s)$$

und bezeichnen $\bar{v}$ bzw. $\underline{v}$ als die obere bzw. untere lokale Volumverzerrung von $f(P)$ in P bezüglich $\mathfrak{G}$. Soweit keine Verwechslungen hinsichtlich der Abbildung f oder der Bezugsmenge $\mathfrak{G}$ möglich sind, bezeichnen wir die obere bzw. untere Volumverzerrung kurz auch mit $\bar{v}(P)$ bzw. $\underline{v}(P)$.

2. 2. Zunächst sei hervorgehoben[3]):

Vor. Es sei $P' = f(P)$ eindeutig im L_n-meßbaren Definitionsbereich $\mathfrak{G}$ des E_n. Der Bildbereich $\mathfrak{G}' = f(\mathfrak{G})$ liege im E_k'.

Beh. I. Ist $\bar{v}(P; f; \mathfrak{G}) > 0$ für (mindestens) einen Punkt $P \in \mathfrak{G}$, so ist $\overline{L}_k'(f(\mathfrak{G})) > 0$. Aus $\overline{L}_k'(f(\mathfrak{M})) = 0$ (wobei $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$), folgt also für jede meßbare Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$, daß $\bar{v}(P; f; \mathfrak{T}) = 0$ für jeden $P \in \mathfrak{T}$.

II. Das Bild einer L_n-Nullmenge $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$ ist jedenfalls dann eine L_k'-Nullmenge, wenn $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) < +\infty$ für jeden $P \in \mathfrak{N}$.

III. Das Bild der Nullstellenmenge $\underline{\mathfrak{V}}_0 = \underline{\mathfrak{V}}_0(f; \mathfrak{G}) = \underset{P \in \mathfrak{G}}{E}[\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0]$ von $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G})$ ist eine L_k'-Nullmenge.

IV. Ist das Bild der Menge $\underline{\mathfrak{V}}_\infty = \underline{\mathfrak{V}}_\infty(f; \mathfrak{G}) = \underset{P \in \mathfrak{G}}{E}[\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = +\infty]$ eine L_k'-Nullmenge, so ist $f(P)$ nullmengentreu (über $\mathfrak{G}$).

Bew. 1) *Betr. Beh.* I. Wegen $\bar{v}(P) > 0$ existiert ein $\mathfrak{W}(P) \in \mathfrak{w}(P)$ mit $V' = \overline{L}_k'(f(\mathfrak{W}(P)\,\mathfrak{G})) > 0$. Wegen $V' \leqq \overline{L}_k'(f(\mathfrak{G}))$ folgt die Beh. — 2) *Betr. Beh.* II *und* III. Es seien $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M}\,\underline{\mathfrak{V}}_\infty = 0$ sowie mit $\overline{L}_n(\mathfrak{M}) < +\infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Gemäß der Definition von $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G})$ gibt es dann zu jedem $P \in \mathfrak{M}$ solche $\mathfrak{W}_\nu \in \mathfrak{w}(P)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, für welche $\lim_{\nu \to \infty} s(\mathfrak{W}_\nu) = 0$ und $0 \leqq q(\mathfrak{W}_\nu; f; \mathfrak{G}) < \underline{v}(P) + \varepsilon$ für alle ν; ist insbesondere $L_n(\mathfrak{W}_\nu \mathfrak{G}) = 0$ für alle $\mathfrak{W}_\nu$ mit hinreichend kleinem $s(\mathfrak{W}_\nu)$, so kann $L_n(\mathfrak{W}_\nu \mathfrak{G}) = 0$ und somit $\overline{L}_k'(f(\mathfrak{W}_\nu \mathfrak{G})) = 0$ für alle ν angenommen werden. Bei beliebig vorgegebenem $\delta > 0$ läßt sich[4]) ferner $\mathfrak{M}$ mit abzählbar vielen der $\mathfrak{W}_\nu$, etwa mit $\mathfrak{W}_\varrho' = \mathfrak{W}_{\nu_\varrho}(P_\varrho)$, $\varrho = 1, 2, \ldots$, derart überdecken, daß $\sum_\varrho L_n(\mathfrak{W}_\varrho') < C_n \cdot (\overline{L}_n(\mathfrak{M}) + \delta)$, wobei $C_n > 0$ eine (nur von n abhängige) Konstante[5])

---

[3]) Für die folgenden Beh. II—IV vgl. RADEMACHER, a. a. O.[2]), § 1—5 (dort werden ein-eindeutige Abbildungen betrachtet).

[4]) Vgl. RADEMACHER, a. a. O.[2]), Satz II; auch HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), II. Bd., S. 154.

[5]) Es kann $C_n = 1$ angenommen werden, vgl. RADEMACHER, a. a. O.[4]).

ist. Gemäß der getroffenen Wahl der $\mathfrak{W}_\nu$ gilt weiter $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{W}'_\varrho\,\mathfrak{G})) \leqq (\underline{v}(P_\varrho; f; \mathfrak{G}) + \varepsilon) \cdot L_n(\mathfrak{W}'_\varrho\,\mathfrak{G}) \leqq (\underline{v}(P_\varrho; f; \mathfrak{G}) + \varepsilon) \cdot L_n(\mathfrak{W}'_\varrho)$. Da $\mathfrak{M} \subset \sum_\varrho \mathfrak{W}'_\varrho\,\mathfrak{G}$, also $f(\mathfrak{M}) \subset \left(\sum_\varrho f(\mathfrak{W}'_\varrho\,\mathfrak{G})\right)$ ist, folgt $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{M})) \leqq \sum_\varrho \overline{L}'_k(f(\mathfrak{W}'_\varrho\,\mathfrak{G}))$ $\leqq \sum_\varrho (\underline{v}(P_\varrho; f; \mathfrak{G}) + \varepsilon) \cdot L_n(\mathfrak{W}'_\varrho)$ und daher

(U) $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{M})) \leqq (h + \varepsilon) \cdot C_n \cdot (\overline{L}_n(\mathfrak{M}) + \delta)$ mit $h = \overline{\text{Grenze}}_\varrho\, \underline{v}(P_\varrho; f; \mathfrak{G})$.

2. A) Zum Beweise der *Beh.* II genügt es, $L'_k(f(\mathfrak{N})) = 0$ nachzuweisen, wenn $0 \leqq \underline{v}(P) < b < +\infty$ für alle $P \in \mathfrak{N}$. Existiert nämlich zu $\mathfrak{N}$ kein solches b, so ist $\mathfrak{N}$, wegen $\underline{v}(P) < +\infty$ für jeden $P \in \mathfrak{N}$, darstellbar als Vereinigung abzählbar vieler L_n-Nullmengen $\mathfrak{N}_\nu$ mit $\underline{v}(P) < b_\nu < +\infty$ für $P \in \mathfrak{N}_\nu$ und mit $\lim_{\nu \to \infty} b_\nu = +\infty$; und aus $L'_k(f(\mathfrak{N}_\nu)) = 0$ folgt dann die Beh. Es sei also $\underline{v}(P) < b < +\infty$ für alle $P \in \mathfrak{N}$. Setzen wir in (U) (Ziff. 2) jetzt $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, so ist $0 \leqq h \leqq b$, so daß $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{N})) < (b + \varepsilon) \cdot C_n \cdot \delta$ für beliebig kleines $\delta > 0$.

2. B) Zum Bew. der *Beh.* III setzen wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}_0$ in (U) (Ziff. 2). Es wird dann $h = 0$, also $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{B}_0)) < \varepsilon \cdot C_n \cdot (L_n(\mathfrak{B}_0) + \delta)$. Ist $L_n(\mathfrak{B}_0) < +\infty$, so wird die rechte Seite (bei festem $\delta > 0$) zugleich mit ε beliebig klein, also $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{B}_0)) = 0$. Im Falle $\overline{L}_n(\mathfrak{B}_0) = +\infty$ stelle man $\mathfrak{B}_0$ dar als Vereinigung abzählbar vieler Teile, deren jeder endliches äußeres L_n-Maß besitzt (eine solche Darstellung ist nach einer bekannten Eigenschaft des L_n-Maßes stets möglich); dem eben Bewiesenen zufolge ist dann $f(\mathfrak{B}_0)$ Vereinigung abzählbar vieler L'_k-Nullmengen, woraus die Beh. folgt.

3) *Betr. Beh.* IV. Bezeichnet $\mathfrak{N}$ irgendeine L_n-Nullmenge aus $\mathfrak{G}$, so ist nach Vor. $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{N}\,\mathfrak{B}_\infty)) = 0$. Ferner ist $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{N} - \mathfrak{B}_\infty)) = 0$ gemäß Beh. II, woraus die Beh. folgt.

2.2.1. Oben (Nr. 2. 1.) wurde $q(\mathfrak{W}; f; \mathfrak{G}) = 0$ gesetzt und damit auch $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$, falls $V = L_n(\mathfrak{W}\,\mathfrak{G}) = 0$ und $V' = \overline{L}'_k(f(\mathfrak{W}\,\mathfrak{G})) = 0$ (dann ist übrigens $V = V' = 0$ für jeden $\mathfrak{W} \in \mathfrak{w}(P)$ von kleinerer Kantenlänge). Derartige $P \in \mathfrak{G}$ seien zur Abkürzung als Unbestimmtheitspunkte (von f) in $\mathfrak{G}$ bzw. in $\mathfrak{G}' = f(\mathfrak{G})$ bezeichnet und die Menge aller Unbestimmtheitspunkte als *Unbestimmtheitsmenge* in $\mathfrak{G}$ bzw. in $\mathfrak{G}'$.

Die Unbestimmtheitsmenge $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}'$ in $\mathfrak{G}$ bzw. in $\mathfrak{G}'$ ist eine L_n- bzw. eine L'_k-Nullmenge. In der Tat: $\mathfrak{F}$ ist mit abzählbar vielen $\mathfrak{W}(P)$, etwa mit $\mathfrak{W}_j = \mathfrak{W}(P_j) \in \mathfrak{w}(P_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, überdeckbar derart, daß $L_n(\mathfrak{W}_j\,\mathfrak{G}) = 0$ und $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{W}_j\,\mathfrak{G})) = 0$ für jedes j. Daher ist $L_n(\mathfrak{F}) = 0$. Ferner wird $\mathfrak{F}'$ überdeckt von der Summe aller $f(\mathfrak{W}_j\,\mathfrak{G})$, woraus $\overline{L}'_k(f(\mathfrak{F}')) = 0$ folgt.

Bei allen folgenden Betrachtungen, nämlich Betrachtungen sei es über meßbare Abbildungen, sei es über Abhängigkeit von Funktionen, kommt es nun auf Nullmengen in $\mathfrak{G}$ oder in $\mathfrak{G}'$ nicht an. Wegen $L_n(\mathfrak{F}) = L'_k(\mathfrak{F}') = 0$

könnte man daher der Volumverzerrung $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G})$ in $P \in \mathfrak{F}$ nicht nur den Wert Null (wie oben in Nr. 2. 1.), sondern irgendeinen anderen endlichen (eventuell von P abhängigen) Wert erteilen. Indes erscheint die Festsetzung $\underline{v}(P) = 0$ für $P \in \mathfrak{F}$ auch für unsere Betrachtungen bequem.

2. 3. Aus Nr. 2. 2. folgt:

Vor. *Es sei $f(P)$ eine eindeutige Abbildung des L_n-meßbaren $\mathfrak{G} \subset E_n$ in den E_k'. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit $\underline{\mathfrak{B}}_\infty(f; \mathfrak{G}) \subset \mathfrak{B}$ und mit $L_k'(f(\mathfrak{B})) = 0$.*

Beh. *Ist $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ L_n-fast überall in $(\mathfrak{G} - \mathfrak{B})$, so ist $L_k'(f(\mathfrak{G})) = 0$ und es ist $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ sogar überall in $\mathfrak{G}$; insbesondere ist also $\underline{\mathfrak{B}}_\infty$ leer.*

Bew. Man setze $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} - \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \underline{\mathfrak{B}}_0(f; \mathfrak{G})$. Weil $\mathfrak{A}$ und folglich $\mathfrak{B}$ fremd ist zu $\underline{\mathfrak{B}}_\infty$, zieht $L_n(\mathfrak{B}) = 0$ wegen Nr. 2. 2., II nach sich, daß $L_k'(f(\mathfrak{B})) = 0$. Ferner ist $L_k'(f(\underline{\mathfrak{B}}_0)) = 0$ (Nr. 2. 2., III). Somit ist $f(\mathfrak{A}) \subset f(\mathfrak{B}) + f(\underline{\mathfrak{B}}_0)$ ebenfalls eine L_k'-Nullmenge und, wegen $L_k'(f(\mathfrak{B})) = 0$, auch $f(\mathfrak{G})$. Gemäß Nr. 2. 2., I folgt daraus die Beh.

2. 4. Eine eindeutige Abbildung $f(P)$ des L_n-meßbaren $\mathfrak{G} \subset E_n$ in den E_k' heißt $({}_nL_k{}')$meßbar, wenn das Bild jeder L_n-meßbaren Teilmenge von $\mathfrak{G}$ selbst L_k'-meßbar ist. Fordert man von der Abbildung (außer der Eindeutigkeit) noch Stetigkeit, so ist[6]) die Nullmengentreue von $f(P)$ notwendig und hinreichend für die Meßbarkeit von $f(P)$. Gemäß Nr. 2. 2., IV ergibt sich daher[7]):

Eine eindeutige und stetige Abbildung $f(P)$ des L_n-meßbaren $\mathfrak{G} \subset E_n$ in den E_k' ist jedenfalls dann $({}_nL_k{}')$ meßbar, wenn $L_k'(f(\underline{\mathfrak{B}}_\infty)) = 0$.

Anmerkung. Herr Rademacher hat bewiesen[8]), daß für stetige *umkehrbar* eindeutige $f(P)$ die Bedingung $L_k'(f(\underline{\mathfrak{B}}_\infty)) = 0$ auch *notwendig* ist für die Meßbarkeit von $f(P)$.

3. Abhängigkeit reeller Funktionen.

3. 1. Es seien die $f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, eindeutige, reelle, endliche Funktionen im Definitionsbereich $\mathfrak{G}$ des E_n der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$. Die $f_\varkappa(P)$ heißen dann[9]) abhängig in $\mathfrak{G}$, wenn eine Abhängigkeitsfunktion $\Phi(x_1', \ldots, x_k')$ existiert derart, daß $\Phi(f_1(P), \ldots, f_k(P)) = 0$ für alle $P \in \mathfrak{G}$

---

[6]) Vgl. z. B. Haupt-Aumann, a. a. O.[1]), III. Bd., S. 139.

[7]) Vgl. Rademacher, a. a. O.[2]), Satz XII.

[8]) Vgl. Rademacher, a. a. O.[2]), Satz XIV.

[9]) Vgl. Knopp-Schmidt, a. a. O.[1]). Dort wird $n = k$ angenommen und entweder $\mathfrak{G}$ als abgeschlossene Hülle $\mathfrak{H}$ einer kompakten offenen Menge oder $\mathfrak{G}$ als offen und die $f_\varkappa(P)$ als abhängig in jeder $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ vorausgesetzt.

dabei wird unter einer Abhängigkeitsfunktion Φ verstanden jede in E' erklärte, eindeutige, reelle (endliche) stetige Funktion, deren Nullstellen eine in E'_k der $P' = (x'_1, \ldots, x'_k)$ nirgends dichte Menge bilden. Da zu jeder nirgends dichten Menge $\mathfrak{T}$ des E'_k Abhängigkeitsfunktionen existieren, in deren Nullstellenmenge die Menge $\mathfrak{T}$ enthalten ist[10]), so kann man auch sagen[9]): Die $f_\varkappa(P)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$) sind dann und nur dann abhängig, wenn bei der durch $P' = f(P) = (f_\varkappa(P), \varkappa = 1, \ldots, k)$ in $\mathfrak{G}$ definierten eindeutigen Abbildung das Bild $f(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ nirgends dicht liegt im E'_k der P'. Dieser Abhängigkeitsbegriff ist somit rein topologischer Natur.

3.2. Das übliche Kriterium für Abhängigkeit differenzierbarer Funktionen für den Fall $n = k$, welches mit dem Verschwinden der Funktionaldeterminante $J(P)$ der $f_\varkappa(P)$ arbeitet, beruht auf einer die Maßtheorie heranziehenden, hinreichenden Bedingung für Nirgends-Dichtheit einer Menge; das Kriterium beruht nämlich im wesentlichen auf der Tatsache, daß eine *abgeschlossene L'_k-Nullmenge* nirgends dicht ist (im E'_k). Des Näheren schließt man so: Da aus der Differenzierbarkeit[11]) der $f_\varkappa(P)$ die Stetigkeit der $f_\varkappa(P)$, also die Stetigkeit von $f(P)$ folgt, so ist im Falle eines abgeschlossenen und kompakten Definitionsbereiches $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{G}' = f(\mathfrak{G})$ abgeschlossen. Und andererseits folgt $L'_\varkappa(\mathfrak{G}') = 0$ aus $J = 0$ in $\mathfrak{G}$. Diese letztere Folgerung beruht ihrerseits auf dem Zusammenhang zwischen Funktionaldeterminante und lokaler Volumverzerrung (vgl. Nr. 4.1.1. und 4.1.2.). Man wird daher zunächst zu folgendem Satz geführt:

Satz. Vor. *Es sei $P' = f(P) = (f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n), \varkappa = 1, \ldots, k)$ eindeutig und stetig in der abgeschlossenen und kompakten Punktmenge $\mathfrak{G} \subset E_n$. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit $L'_k(f(\mathfrak{B})) = 0$ und $\underline{\mathfrak{B}}_\infty(f; \mathfrak{G}) \subset \mathfrak{B}$, wobei $\underline{\mathfrak{B}}_\infty(f; \mathfrak{G}) = \underline{\mathfrak{B}}_\infty = E\,[\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = +\infty]$ ist und $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G})$ die untere lokale Volumverzerrung von $f(P)$ in P bezüglich $\mathfrak{G}$ bezeichnet.*

Beh. *Ist $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ L_n-fast überall in $(\mathfrak{G} - \mathfrak{B})$, so sind die $f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, abhängig in $\mathfrak{G}$ [überdies ist $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ sogar überall in $\mathfrak{G}$, insbesondere also $\underline{\mathfrak{B}}_\infty$ leer].*

Bew. Zufolge $L'_k(f(\mathfrak{B})) = 0$, $\underline{\mathfrak{B}}_\infty \subset \mathfrak{B}$ und $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ L_n-fast überall in $(\mathfrak{G} - \mathfrak{B})$ ist $L'_k(f(\mathfrak{G})) = 0$ und $\underline{v}(P) = 0$ überall in $\mathfrak{G}$ (gemäß

---

[10]) Vgl. KNOPP-SCHMIDT, a. a. O.[1]), wo sogar beliebig oft differenzierbare derartige Abhängigkeitsfunktionen konstruiert werden. Eine, wenn auch nicht notwendig differenzierbare Abhängigkeitsfunktion der gewünschten Art wäre der Abstand eines Punktes von (der abgeschlossenen Hülle von) $\mathfrak{T}$; vgl. LÉVY, a. a. O.[1]), S. 219. Bei KNOPP-SCHMIDT wird von den Abhängigkeitsfunktionen stetige Differenzierbarkeit gefordert.

[11]) Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit stets um Differenzierbarkeit im STOLZschen Sinne [vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), II. Bd., S. 112–113].

Nr. 2. 3.). Wegen der Stetigkeit von $f(P)$ sowie wegen der Kompaktheit und Abgeschlossenheit von $\mathfrak{G}$ ist ferner $f(\mathfrak{G})$ abgeschlossen im E_k', also dort nirgends dicht.

Anmerkung. Will man umgekehrt aus der Abhängigkeit der $f_\varkappa(P)$ in $\mathfrak{G}$ auf $\underline{v}(P) = 0$ für $P \in (\mathfrak{G} - \underline{\mathfrak{B}}_\infty)$ schließen können, so sind weitere Forderungen zu stellen. Hinreichend ist etwa, daß zu jedem $P \in (\mathfrak{G} - \underline{\mathfrak{B}}_\infty)$ mit $0 < \underline{v}(P)$ ein $\mathfrak{B}(P)$ gehört mit im E_k' nicht nirgends dichtem $f(\mathfrak{G}\mathfrak{B}(P))$. (Vgl. auch Nr. 4. 2., Bew. von Beh. 3).

4. Abhängigkeit im wesentlichen differenzierbarer Funktionen.

4.1. Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß die *Anzahl der unabhängigen Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n$ *gleich* ist *der Anzahl der Funktionen* $f_\nu(x_1 \ldots, x_n), \nu = 1, \ldots, n$, d. h. auf eindeutige (stetige) Abbildungen $f(P)$ des $\mathfrak{G} \subset E_n$ in den E_n'. Es werde dann $f(P)$ als im Punkte $P \in \mathfrak{G}$ differenzierbar bezeichnet, wenn die $f_\nu(P)$ sämtlich in P differenzierbar (im Stolzschen Sinne) sind. Ferner bezeichne man $f(P)$ als in bezug auf Abhängigkeit (i. b. a. A.) im wesentlichen differenzierbar in $\mathfrak{G}$, wenn die Menge $\mathfrak{S}$ derjenigen Punkte aus $\mathfrak{G}$, in welchen $f(P)$ nicht differenzierbar ist, in eine L_n'-Nullmenge abgebildet wird $(L_n'(f(\mathfrak{S})) = 0)$.

Anmerkung. Der Begriff der Differenzierbarkeit „i. b. a. A. im wesentlichen" ist, worauf schon die Bezeichnung hinweist, ganz auf Abhängigkeitsfragen zugeschnitten. In der Tat kann ja sogar eine *nirgends* differenzierbare Abbildung i. b. a. A. im wesentlichen differenzierbar sein [Beispiel: $n = 2$, $f_1(x, y) = g(x)$, $f_2(x, y) = Ag(x) + B$, wobei $\mathfrak{G} = (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$ und wobei $g(x)$ stetig und nirgends differenzierbar in $(-\infty, +\infty)$].

4.1.1. Für den Beweis der nachstehenden Abbildungssätze, in welchen die Funktionaldeterminante $J(P)$ von $f(P)$ in $P \in \mathfrak{G}$ an Stelle der Volumverzerrung von $f(P)$ in P bezüglich $\mathfrak{G}$ benutzt werden soll, ist ein gewisser Einblick in die Zusammenhänge zwischen Funktionaldeterminante und Volumverzerrung bezüglich $\mathfrak{G}$ erforderlich.

Zur Gewinnung eines solchen Einblickes betrachten wir eine L_n-meßbare Teilmenge $\mathfrak{M}$ des E_n. In einer Umgebung von $\mathfrak{M}$ sei $f(P)$ eindeutig erklärt und in $P \in \mathfrak{M}$ differenzierbar; $J(P)$ sei der Wert der Funktionaldeterminante von $f(P)$ in P.

Zunächst sehen wir von dem Falle ab, daß $L_n(\mathfrak{B}\mathfrak{M}) = 0$ für (mindestens) einen $\mathfrak{B} \in \mathfrak{w}(P)$. Dann ist

$$q(\mathfrak{B}; f; \mathfrak{M}) \cdot [L_n(\mathfrak{B}\mathfrak{M}) : L_n(\mathfrak{B})] \leqq [L_n'(f(\mathfrak{B})) : L_n(\mathfrak{B})].$$

Für $s(\mathfrak{W}) \to 0$ ist der obere bzw. untere Limes des zweiten Faktors linkerhand in vorstehender Ungleichung die sogenannte obere bzw. untere (L_n-Maß-) Dichte $\overline{D}(P;\mathfrak{M})$ bzw. $\underline{D}(P;\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ in P bezüglich $\mathfrak{w}(P)$; dabei ist $0 \leqq \underline{D}(P;\mathfrak{M}) \leqq \overline{D}(P;\mathfrak{M}) \leqq 1$. Hingegen konvergiert der Quotient rechterhand (in vorstehender Ungleichung) für $s(\mathfrak{W}) \to 0$ bekanntlich[12]) gegen $|J(P)|$, gleichgültig, ob $|J(P)| > 0$ oder $|J(P)| = 0$. Somit hat man

$$\underline{v}(P;f;\mathfrak{M}) \cdot \overline{D}(P;\mathfrak{M}) \leqq |J(P)| \quad \text{und} \quad \bar{v}(P;f;\mathfrak{M}) \cdot \underline{D}(P;\mathfrak{M}) \leqq |J(P)|.$$

Wir bezeichnen jeden Punkt $Q \in \mathfrak{M}$ mit $\underline{D}(Q;\mathfrak{M}) = \overline{D}(Q;\mathfrak{M}) = 0$ als Punkt kleinster (L_n-)Maßdichte von $\mathfrak{M}$ und die Menge aller dieser maßdichtekleinsten Punkte von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}^{(0)}$. Übrigens[13]) *ist $\mathfrak{M}^{(0)}$ eine L_n-Nullmenge.* Speziell ist $Q \in \mathfrak{M}^{(0)}$, wenn $L_n(\mathfrak{W}\mathfrak{M}) = 0$ für einen $\mathfrak{W} \in \mathfrak{w}(Q)$ und folglich auch für alle kleineren $\mathfrak{W} \in \mathfrak{w}(Q)$.

Aus den vorstehenden Feststellungen kann man unter anderem entnehmen:

Hilfssatz. Vor. *Es sei $\mathfrak{M} \subset E_n$ L_n-meßbar und $\mathfrak{M}^{(0)}$ die (L_n-Null-)Menge der Punkte kleinster Maßdichte von $\mathfrak{M}$. Ferner sei die eindeutige Abbildung $f(P)$ einer Umgebung von $\mathfrak{M}$ in den E'_n differenzierbar in $\mathfrak{M}$ bis auf eine Teilmenge $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}$.*

Beh. I. *Es ist $\underline{\mathfrak{B}}_\infty(f;\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}^{(0)} + \mathfrak{S}$. Genauer: In jedem Punkt P von $(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(0)} - \mathfrak{S})$ ist $\underline{v}(P;f;\mathfrak{M}) < +\infty$; insbesondere ist $\underline{v}(P;f;\mathfrak{M}) = 0$, falls $|J(P)| = 0$.*

II. *In jedem* inneren *Punkte P von $\mathfrak{M}$ mit $P \in \mathfrak{M} - \mathfrak{S}$ gilt $\bar{v}(P;f;\mathfrak{M}) = \underline{v}(P;f;\mathfrak{M}) = |J(P)|$.*

Anmerkung. Man kann also L_n-fast überall in $(\mathfrak{M} - \mathfrak{S})$ aus $J(P) = 0$ auf $\underline{v}(P;f;\mathfrak{M}) = 0$ schließen, aber nicht ohne weiteres umgekehrt.

4.1.2. Wir erinnern weiter an folgende Tatsache[14]): Ist die eindeutige (stetige) Abbildung $f(P)$ (schwach) differenzierbar in allen Punkten einer, im übrigen beliebigen Teilmenge $\mathfrak{T}$ ihres Definitionsbereiches und ist $J(P) = 0$ in allen $P \in \mathfrak{T}$, so ist $f(\mathfrak{T})$ eine L'_n-Nullmenge.

4.2. Mit Hilfe der Feststellungen in § 2 und 3 ergibt sich jetzt beispielsweise der

Satz. Vor. *Es sei $P' = (x'_1, \ldots, x'_n) = f(P) = (f_\nu(x_1, \ldots, x_n), \nu = 1, \ldots, n)$ eindeutig und stetig in der offenen Punktmenge $\mathfrak{D}$ des E_n.*

---

[12]) Der unseres Wissens erste elementare Beweis bei HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), II. Bd., S. 150ff.

[13]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), III. Bd., S. 121.

[14]) Vgl. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), II. Bd., S. 154, Absatz 2.

Ferner sei $f(P)$ in $\mathfrak{D}$ i. b. a. A. im wesentlichen differenzierbar, also differenzierbar in $(\mathfrak{D} - \mathfrak{S})$, wobei $L'_n(f(\mathfrak{S})) = 0$.

Beh. 1) *Die Abbildung $f(P)$ von $\mathfrak{D}$ in den E'_n ist meßbar.*

2) *Es sei $\mathfrak{G}$ ein abgeschlossener, kompakter Teil von $\mathfrak{D}$. Ist die Funktionaldeterminante $J(P)$ von $f(P)$ gleich Null L_n-fastüberall in $(\mathfrak{G} - \mathfrak{S})$, so sind die $f_\nu(P)$ abhängig in $\mathfrak{G}$. (Jedenfalls ist dann $J(P) = 0$ in allen inneren Punkten von $\mathfrak{G}$, soweit sie nicht zu $\mathfrak{S}$ gehören.)*

3) *Es sei $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}$ abgeschlossene Hülle einer offenen Teilmenge $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{D}$. Dann folgt aus der Abhängigkeit der $f_\nu(P)$ in $\mathfrak{H}$, daß $J(P) = 0$ überall in $(\mathfrak{O} - \mathfrak{S})$. Ist überdies $|J(P)|$ unterhalb stetig in den nicht zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Randpunkten von $\mathfrak{H}$, so folgt aus der Abhängigkeit der $f_\nu(P)$ in $\mathfrak{H}$, daß $J(P) = 0$ sogar überall in $(\mathfrak{H} - \mathfrak{S})$.*

Bew. 1) *Betr. Beh.* 1). Es ist $\mathfrak{D}$, weil offen, L_n-meßbar. Ferner ist in jedem Punkt von $(\mathfrak{D} - \mathfrak{S})$ jedenfalls $\underline{v}(P; f; \mathfrak{D}) = |J(P)| < +\infty$, also $\underline{\mathfrak{B}}_\infty \subset \mathfrak{S}$.

2) *Betr. Beh.* 2) Gemäß *Beh.* 1) ist $f(P)$ meßbar, also nullmengentreu, weil $f(P)$ nach Vor. auch stetig (vgl. Nr. 2. 4.); mithin gilt $L'_n(f(\mathfrak{G}^{(0)})) = 0$. Gemäß Nr. 4. 1. 1. ist aber $\underline{\mathfrak{B}}_\infty(f; \mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}^{(0)} + \mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ und nach Vor. ist $J(P) = 0$, also (Nr. 4. 1. 1.) $\underline{v}(P; f; \mathfrak{G}) = 0$ für L_n-fast alle $P \in \mathfrak{G} - \mathfrak{S}'$. Aus Nr. 3. 2. ergibt sich daher die Beh. — *Betr. Beh.* 3). Wäre $|J(P)| > 0$ in (mindestens einem) $P \in \mathfrak{O} - \mathfrak{S}$, so enthielte $f(\mathfrak{H})$ in der Umgebung von $f(P)$ (im E'_n) eine offene (nicht leere) Menge[15]), wäre also nicht nirgends dicht im E'_n; somit ist $J(P) = 0$ für $P \in \mathfrak{O} - \mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{H}$ abgeschlossene Hülle einer offenen Menge $\mathfrak{O}$ sein soll, so ist jeder Randpunkt von $\mathfrak{H}$ Häufungspunkt von inneren Punkten P' von $\mathfrak{H}$ mit $J(P') = 0$. Aus der vorausgesetzten Unterhalbstetigkeit von $|J(P)|$ in den Randpunkten von $\mathfrak{H}$, soweit sie nicht zu $\mathfrak{S}$ gehören, folgt daher, daß $J(P) = 0$ auch in diesen Randpunkten.

4. 3. Beispiele von i. b. a. A. im wesentlichen differenzierbarer Abbildungen werden geliefert durch die dehnungsbeschränkten; das sind solche Abbildungen, für welche der Quotient Entfernung irgend zweier Bildpunkte dividiert durch die Entfernung zugehöriger (verschiedener) Urbildpunkte beschränkt ist. Solche Abbildungen sind nämlich meßbar[16]), also, weil sogar stetig, auch nullmengentreu (vgl. Nr. 2. 4.); andererseits sind sie fast überall differenzierbar[17]) und mithin ist das Bild der Menge der „nicht-differenzierbaren" Punkte sowohl als das der Menge der Punkte kleinster Maß-

[15]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), Bd. II, S. 144.
[16]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), III. Bd., S. 143.
[17]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), III. Bd., S. 136.

dichte des Definitionsbereiches eine Nullmenge im Bildraum. Wir haben daher den

Satz. Vor. *Es sei* $P' = f(P)$ *eine eindeutige, dehnungsbeschränkte Abbildung der offenen Punktmenge* $\mathfrak{D}$ *des* E_n *in den* E'_n.

Beh. 1) *Ist* $\mathfrak{G}$ *ein abgeschlossener, kompakter Teil von* $\mathfrak{D}$ *und ist die Funktionaldeterminante* J *der Abbildung, soweit* J *existiert, gleich Null* L_n*-fast überall in* $\mathfrak{G}$, *so sind die* $f_\nu(P)$ *abhängig in* $\mathfrak{G}$.

2) *Ist* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{D}$ *abgeschlossene Hülle einer offenen Teilmenge von* $\mathfrak{D}$ *und ist* $|J|$, *soweit* J *existiert, unterhalb stetig in den Randpunkten von* $\mathfrak{G}$, *so folgt aus der Abhängigkeit der* $f_\nu(P)$ *in* $\mathfrak{G}$ *das Verschwinden von* J *überall in* $\mathfrak{G}$ *(soweit* J *existiert).*

5. Verallgemeinerungen.

In den vorangehenden Betrachtungen sind Urbild- und Bildbereich $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}' = f(\mathfrak{G})$ stets als euklidisch angenommen. Bei den Beweisen werden aber nur verhältnismäßig wenige Eigenschaften des euklidischen Raumes benutzt. Dies sei hier noch etwas näher ausgeführt.

5.1. Für die Gültigkeit der Beweise in Nr. 2. 2. und 2. 3. sind folgende Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ hinreichend. I) Es sind $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ Punktmengen, in deren jeder ein vollständiges (volladditives) Maß m bzw. m' erklärt ist[18]). II) Jedem Punkt $P \in \mathfrak{G}$ ist ein (nicht leeres) System $\mathfrak{w}(P)$ von m-meßbaren P enthaltenden Teilmengen $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{G}$ mit $m(\mathfrak{W}) > 0$ zugeordnet; dabei ist $\mathfrak{w}(P)$ teilweise geordnet in dem Sinne, daß zu beliebigen $\mathfrak{W}_j \in \mathfrak{w}(P)$, $j = 1, 2$ ein $\mathfrak{W} \in \mathfrak{w}(P)$ existiert mit $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}_j$, $j = 1, 2$. III) Für die Gesamtheit der allen $P \in \mathfrak{G}$ zugeordneten $\mathfrak{W}$ gilt folgender Überdeckungssatz: Ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit endlichem äußeren Maß $\bar{m}(\mathfrak{T})$, so läßt sich $\mathfrak{T}$ überdecken mit abzählbar vielen der $\mathfrak{W}$, etwa mit $\mathfrak{W}'_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots$, derart, daß $\sum_\varrho m(\mathfrak{W}'_\varrho) < (\bar{m}(\mathfrak{T}) + \varepsilon) \cdot C$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $C > 0$ eine von $\mathfrak{T}$ und ε unabhängige Zahl ist.

5.2. Dafür, daß aus der Nullmengentreue die (m, m')-Meßbarkeit der eindeutigen Abbildung $f(P)$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ folgt (vgl. Nr. 2. 4.), ist neben den in Nr. 5. 1. angegebenen Forderungen hinreichend: In $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$ existiert ein System $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}'$ von m- bzw. m'-meßbaren Mengen derart, daß 1) kennzeichnend für m- bzw. m'-Meßbarkeit von $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ bzw. von $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{G}'$ ist die Darstellbarkeit von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ als Summe einer m- bzw. m'-Nullmenge und einer Menge $\mathfrak{T} \in \mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{T}' \in \mathfrak{t}'$, ferner daß 2) gilt $f(\mathfrak{T}) \in \mathfrak{t}'$ für jede $\mathfrak{T} \in \mathfrak{t}$. Ist speziell

---

[18]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, a. a. O.[1]), III. Bd., S. 15.

das System $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}'$ der $\mathfrak{F}_\sigma$ aus $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$ ein der Forderung 1) genügendes System $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}'$, so ist für $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ auch Forderung 2) erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ ein topologischer, bikompakter Raum und $\mathfrak{G}'$ ein Hausdorff-Raum, und wenn $f(P)$ stetig ist[19]).

5. 3. Ist schließlich $f(P) = (f_\nu(P), \nu = 1, \ldots, n)$ mit in $\mathfrak{G}$ eindeutigen f_ν, so folgt (vgl. Nr. 3. 2.) die Abhängigkeit der f_ν aus $m'(f(\underline{\mathfrak{B}}_\infty)) = 0$ und $m(\mathfrak{G} - \underline{\mathfrak{B}}_\infty - \underline{\mathfrak{B}}_0) = 0$, wenn neben den in Nr. 5. 1. aufgezählten Forderungen noch folgendes gilt: Es ist $\mathfrak{G}'$ abgeschlossener Teil eines topologischen Raumes $\mathfrak{G}''$ derart, daß jede in $\mathfrak{G}''$ offene, nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{G}''$ positives äußeres m'-Maß besitzt.

---

[19]) Vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I., S. 95, Satz II, Berlin 1935.

(Eingegangen am 16. Oktober 1943.)

Eine Bemerkung zur C_k- und A-Limitierung von Funktionen.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Wenn eine Zahlenfolge $(s_0, s_1, \ldots)$ C_k-limitierbar ist zum Werte σ, so ist sie bekanntlich auch A-limitierbar zum gleichen Werte. Ausführlicher: Wenn $C_k\text{-}\lim s_n = \sigma$ ist, wenn also die Folge

$$C_k(n; s_\nu) = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu$$

$\to \sigma$ strebt für $n \to \infty$ $(k \geqq 0$, fest), so folgt zunächst, daß $s_\nu = O(\nu^k)$ ist, und hieraus, daß die A-Transformation der Folge, d. h. die Funktion

$$A(x) = A(x; s_\nu) = \frac{1}{x} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-\frac{\nu}{x}}$$

für jedes $x > 0$ vorhanden ist und daß auch $A(x) \to \sigma$ strebt für $x \to \infty$.

Bei der Transformation von Funktionen $s(t)$, die für $t > 0$ erklärt und für jedes $c > 0$ in $0 < t \leqq c$ beschränkt und über $(0, c)$ integrierbar[1]) sein sollen (die Klasse dieser Funktionen heiße $\mathfrak{S}$), liegen die Dinge, wie bisher nicht bemerkt zu sein scheint, nur für $0 \leqq k \leqq 1$ ähnlich (Satz 1). Für $k > 1$ dagegen gibt es Funktionen in $\mathfrak{S}$, die C_k-limitierbar sind, deren Abel-Laplace- oder A-Transformation aber für kein $x > 0$ existiert (Satz 2). Setzt man aber die Existenz dieser A-Transformation voraus, so strebt auch sie für $x \to \infty$ gegen den gleichen Grenzwert wie die C_k-Transformation (Satz 3; $C_k \to A$-Satz). Das Entsprechende gilt für die H_k-Transformation.

Satz 1. *Ist* $0 < k \leqq 1$[2]) *und strebt die* C_k*-Transformation der Funktion* $s(t)$ *aus* $\mathfrak{S}$, *d. h. die Funktion*

$$C_k(x; s(t)) = \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} s(t)\, dt \to \sigma \tag{1}$$

---

[1]) D. h. im LEBESGUEschen Sinne integrierbar. Doch ist dies für das Folgende unwesentlich.

[2]) Der Fall $k = 0$ ist trivial.

für $x \to \infty$, so ist die A-Transformation von $s(t)$, d. h. die Funktion

$$A(x) = A(x; s(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} s(t)\, dt \tag{2}$$

für jedes $x > 0$ vorhanden und auch sie strebt $\to \sigma$ für $x \to \infty$. Kürzer: Aus $C_k\text{-}\lim s(t) = \sigma$ folgt $A\text{-}\lim s(t) = \sigma$.

Beweis. Der Permanenzsatz der C-Verfahren besagt, daß aus $C_k\text{-}\lim s(t) = \sigma$ und $0 \leqq k \leqq k'$ folgt, daß auch $C_{k'}\text{-}\lim s(t) = \sigma$ ist. Aus (1) und $0 < k \leqq 1$ folgt also zunächst, daß $C_1\text{-}\lim s(t) = \sigma$ ist und daß also

$$S_1(x) = \int_0^x s(t)\, dt = \sigma x + o(x) = O(x)$$

ist. Nun ist für jedes $x > 0$ und $\omega > 0$

$$\frac{1}{x} \int_0^\omega e^{-\frac{t}{x}} s(t)\, dt = \frac{1}{x} e^{-\frac{\omega}{x}} S_1(\omega) + \frac{1}{x^2} \int_0^\omega e^{-\frac{t}{x}} S_1(t)\, dt. \tag{3}$$

Wegen $S_1(t) = O(t)$ folgt hieraus sofort die Konvergenz des Integrals in (2) und die Darstellung

$$A(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} S_1(t)\, dt,$$

in der das neue Integral absolut konvergiert. Aus ihr folgt [wegen $S_1(t) = (\sigma + \varepsilon(t))\, t$ mit $\varepsilon(t) \to 0$ für $t \to \infty$] in üblicher Weise, daß $A(x) \to \sigma$ strebt für $x \to \infty$.

Satz 2. *Ist $k > 1$, so gibt es Funktionen $s(t)$ in $\mathfrak{S}$, für die zwar $C_k\text{-}\lim s(t) = \sigma$ existiert (so daß also (1) gilt), für die aber die A-Transformation (2) von $s(t)$ für kein $x > 0$ vorhanden ist.*

Es genügt, den Beweis für die k in $1 < k < 2$ zu führen. Denn ist für ein solches k eine Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ aufgezeigt, für die (1) existiert, deren A-Transformation (2) aber für kein $x > 0$ vorhanden ist, so leistet eine solche Funktion wegen des Permanenzsatzes der C-Verfahren das Entsprechende auch für jedes $k \geqq 2$.

Dem weiteren Beweis schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. Ist für eine Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ $C_2\text{-}\lim s(t) = \sigma$ vorhanden, so existiert ihre A-Transformation (2) dann und nur dann für ein bestimmtes $x > 0$, wenn

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{\omega}{x}} S_1(\omega) \qquad \left(S_1(x) = \int_0^x s(t)\, dt\right) \tag{4}$$

existiert.

Beweis. Führt man rechter Hand in (3) nochmals eine Teilintegration aus, so ergibt sich

$$(5)\qquad \frac{1}{x}\int_0^{\omega} e^{-\frac{t}{x}} s(t)\,dt = \frac{1}{x}e^{-\frac{\omega}{x}} S_1(\omega) + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{\omega}{x}} S_2(\omega) + \frac{1}{x^3}\int_0^{\omega} e^{-\frac{t}{x}} S_2(t)\,dt,$$

wenn $\int_0^x S_1(t)\,dt = S_2(x)$ gesetzt wird. Wegen $C_2\big(x; s(t)\big) = \frac{2}{x^2} S_2(x) \to \sigma$ ist $S_2(x) = O(x^2)$. Daher strebt für $\omega \to \infty$ der zweite Summand rechts in (5) gegen 0, der dritte gegen den Wert des absolut konvergenten Integrals

$$\frac{1}{x^3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}} S_2(t)\,dt.$$

Also hat die linke Seite in (5) dann und nur dann für $\omega \to \infty$ einen Grenzwert, wenn dies für den ersten Summanden rechts der Fall ist, wenn also der Grenzwert (4) existiert.

Beweis von Satz 2. Es sei nun k ein fester Wert in $1 < k < 2$ und $p = \frac{1}{k-1}$. Dann wähle man eine Folge δ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots)$, von positiven Zahlen, die sämtlich $< \frac{1}{2}$ sind und für die $\sum \delta_\nu^{p-1}$ konvergiert. Wird dann

$$(6)\quad S_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_n}\cos^2(t-n)\dfrac{\pi}{2\,\delta_n^p} & \text{in } n - \delta_n^p \leqq t \leqq n + \delta_n^p, \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \text{ sonst in } t \geqq 0 \end{cases}$$

gesetzt, so ist diese Funktion $S_1(t)$ für $t \geqq 0$ offenbar stetig differenzierbar, also

$$(7)\qquad s(t) = S_1'(t)$$

eine (sogar stetige) Funktion aus $\mathfrak{S}$. Wir werden zeigen, daß sie bei geeigneter Wahl der δ_ν das Gewünschte leistet.

Setzen wir wie üblich für $\alpha > 0$

$$S_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} s(t)\,dt$$

[eine Erklärung, die für $\alpha = 1$ und 2 die schon eingeführten Funktionen $S_1(t)$ und $S_2(t)$ liefert], so ist für $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ bekanntlich $S_\alpha(S_\beta) = S_{\alpha+\beta}$, d. h.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} S_\beta(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} s(t)\,dt.$$

Es ist also

$$S_k(x) = S_{k-1}(S_1) = \frac{1}{\Gamma(k-1)} \int_0^x (x-t)^{k-2} S_1(t)\, dt. \tag{8}$$

Für ein x in $n - \delta_n^p \leqq x \leqq n + \delta_n^p$ ist also

$$S_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k-1)} \left(\int_0^{n-\frac{1}{2}} + \int_{n-\delta_n^p}^x \right) (x-t)^{k-2} S_1(t)\, dt. \tag{9}$$

Für $\nu = 1, 2, \ldots$ ist nun

$$\int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} S_1(t)\, dt = \frac{1}{\delta_\nu} \int_{\nu-\delta_\nu^p}^{\nu+\delta_\nu^p} \cos^2(t-\nu) \frac{\pi}{2\,\delta_\nu^p} dt = \delta_\nu^{p-1};$$

wegen $S_1(t) \geqq 0$ und $\sum_\nu \delta_\nu^{p-1} < \infty$ ist daher $\int_0^y S_1(t)\, dt$ mit y monoton wachsend, aber beschränkt. Und da im ersten der beiden Integrale in (9) der Faktor $(x-t)^{k-2}$ wegen $x - t \geqq \frac{1}{2} - \delta_n^p$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke bleibt, so ist dies Integral $= O(1)$. Im zweiten ist $S_1(t) \leqq \frac{1}{\delta_n}$, dies Integral also

$$\leqq \frac{1}{\delta_n} \int_{n-\delta_n^p}^x (x-t)^{k-2}\, dt = \frac{1}{\delta_n} \frac{(x-n+\delta_n^p)^{k-1}}{k-1} \leqq \frac{2^{k-1}}{k-1}.$$

Liegt aber x in einem der Restintervalle $n + \delta_n^p < x < n + 1 - \delta_{n+1}^p$, so ist $S_k(x) < S_k(n + \delta_n^p)$. Daher ist $S_k(x) = O(1) = o(x^k)$ und also $C_k\text{-}\lim s(t)$ vorhanden und $= 0$. Andererseits ist, weil auch $C_2\text{-}\lim s(t)$ vorhanden und $= 0$ ist, nach dem Hilfssatz die A-Transformation dann und nur dann für ein (festes) $x > 0$ vorhanden, wenn der Grenzwert (4) existiert. Es ist aber für $\omega = n$

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{n}{x}} S_1(n) = \frac{1}{x} e^{-\frac{n}{x}} \cdot \frac{1}{\delta_n}.$$

Wählt man also $\delta_n = e^{-n^2}$ (was die an die δ_n gestellten Forderungen erfüllt), so ist

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{n}{x}} S_1(n) = \frac{1}{x} e^{n\left(n-\frac{1}{x}\right)}.$$

Der Grenzwert (4) ist also für kein $x > 0$ vorhanden. Daher besitzt $s(t)$ keine A-Transformation.

Um aus der C_k-Limitierbarkeit einer Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ allgemein auf ihre A-Limitierbarkeit (zum gleichen Werte) schließen zu können, ist es

also notwendig, die Existenz der A-Transformation vorauszusetzen. Es läßt sich zeigen, daß dies auch hinreichend ist.

Satz 3. *Ist $k > 0$ beliebig, C_k-lim $s(t) = \sigma$ und ist die A-Transformation (2) von $s(t)$ für alle (hinreichend großen) x vorhanden, so gilt auch für diese*

$$A(x) \to \sigma \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Beweis. Nach dem Permanenzsatz strebt einerseits für jedes ganze $l \geqq k$ auch

$$\sigma_l(x) = C_l(x; s(t)) \to \sigma \quad \text{für } x \to \infty.$$

Andererseits folgt aus der Existenz der A-Transformation von $s(t)$ für ein (festes) $x > 0$ auch die Existenz der A-Transformation von $S_1(t)$ für dasselbe x, und es ist

$$A(x; s(t)) = \frac{1}{x} A(x; S_1(t)). \tag{10}$$

Das ist eine unmittelbare Folge eines Hilfssatzes von O. Perron[3]), der besagt: Wenn $\varphi(t)$ für $t > t_0$ differenzierbar ist und $\varphi(t) + x\varphi'(t)$ für ein $x > 0$ bei $t \to \infty$ einem Grenzwert zustrebt, so strebt $\varphi(t)$ demselben Grenzwert zu[4]). Man hat, um (10) zu beweisen, diesen Hilfssatz nur auf $\varphi(t) = \frac{1}{x^2} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{x}} S_1(\tau)\, d\tau$ anzuwenden. Denn dann ist $\varphi(t) + x\varphi'(t)$ $= \frac{1}{x} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{x}} s(\tau)\, d\tau$ und strebt also bei $t \to \infty$ nach Voraussetzung gegen $A(x; s(t))$[5]). Durch im ganzen l-malige Anwendung dieses Satzes folgt, daß auch die A-Transformation von $S_l(t)$ existiert und daß

$$A(x; s(t)) = \frac{1}{x^l} A(x; S_l(t))$$

---

[3]) O. Perron, Zur Theorie der divergenten Reihen. Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 158—160; sowie: Über einen Grenzwertsatz. Ebenda 17 (1923), S. 149—152.

[4]) Er ergibt sich sofort durch geeignete Anwendung der Regel von de l'Hospital. Nach ihr ist nämlich, falls $x > 0$ ist, bei $t \to \infty$

$$\lim \varphi(t) = \lim \frac{e^{\frac{t}{x}} \varphi(t)}{e^{\frac{t}{x}}} = \lim (\varphi(t) + x\varphi'(t)).$$

[5]) Vgl. hierzu: G. Doetsch, Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. Ann. della R. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1935), S. 71—84 (S. 78, Hilfssatz 2); sowie: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937 (S. 149).

ist. Wegen $S_l(t) = \frac{t^l}{l!}\sigma_l(t)$ ist hiernach

$$A(x; s(t)) = \frac{1}{l!\, x^{l+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} t^l \sigma_l(t)\, dt.$$

Wegen $\sigma_l(t) \to \sigma$ folgt hieraus aber unmittelbar in der üblichen Weise, daß auch $A(x) \to \sigma$ strebt. Denn die auf $\sigma_l(t)$ angewandte Transformation mit der Vermittlungsfunktion $\frac{1}{l!\, x}\left(\frac{t}{x}\right)^l e^{-\frac{t}{x}}$ ist ganz offenbar permanent[6]).

Wegen des für die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ bei beliebigem $k \geqq 0$ geltenden Äquivalenzsatzes der C_k- und H_k-Limitierung gilt das Entsprechende auch für den Übergang von der H_k zur A-Transformation.

Ich benutze diese Gelegenheit, um nachzutragen, daß bei den in zwei vorangehenden Arbeiten[7]) anhangsweise und in einer früheren Arbeit[8]) als Beispiel behandelten Sätzen über die A-Transformation von Funktionen aus $\mathfrak{S}$, und zwar in I, Nr. 7 bei den ohne Beweis gemachten Angaben über die Beziehung des C_k- bzw. H_k-Verfahrens zum A-Verfahren, in II, Nr. 33 und in Nr. 9 der früheren Arbeit die Existenz der A-Transformation ausdrücklich vorausgesetzt werden muß.

---

[6]) Siehe etwa K. Knopp, Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 229–264 (S. 260).

[7]) I: s. Fußnote 4; II: Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen. Math. Zeitschr. **49** (1943), S. 219–255.

[8]) Zur Theorie der Limitierungsverfahren. I. Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97–127.

(Eingegangen am 20. November 1943.)